Quincena del 1 al 14 de de febrero de 2022

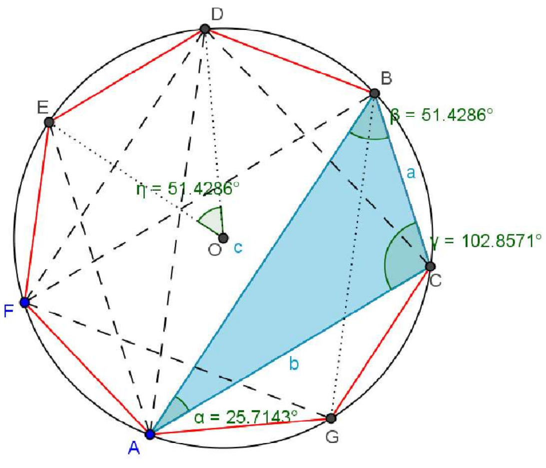
Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)

***Problema* 1035.-** *Dado un triángulo heptagonal con inradio r y circunradio R, determinar r/R; probar que r/R es algebraico, justificar que $Q(r/R)$ es un cuerpo y calcular $(r/R)^{-1}$ en $Q(r/R)$.*

Pérez, M. A. (2022): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Según dijimos ya en el problema 963, de la primera quincena de diciembre de 2020, citando a la Wikipedia, *un triángulo heptagonal es un triángulo escaleno obtuso cuyos vértices coinciden con el primer, segundo y cuarto vértices de un heptágono regular (desde un vértice inicial arbitrario). Por lo tanto, sus tres lados coinciden con un lado y con las diagonales adyacentes más cortas y más largas de un heptágono regular.*



Sus ángulos miden $A = \frac{\pi}{7}, B = 2A = \frac{2\pi}{7}$ *y* $C = 4A = \frac{4\pi}{7}$.

a) r/R es algebraico.

El valor de $\theta = r/R$ es $\frac{r}{R} = 2\cos A - 3/2$. El detalle del cálculo, muy prolijo, está al final.

Para que ese número sea algebraico en Q ha de ser la solución de una ecuación polinómica con coeficientes racionales. Aquí basta con encontrar un polinomio en $Q[x]$ del cual sea solución el número $2\cos A$. Se nos ocurrió pensar que tal vez le acompañaran los números $2\cos 2A$ y $2\cos 4A$, pero un simple cálculo de la suma de los mismos con calculadora nos dio un número decimal, con muy poco aspecto de racional, con lo que cambiamos esa idea por la de tomar los ángulos suplementarios, o sea, probar con $2\cos 5A$ y $2\cos 3A$, como aparece en la Red.

Los coeficientes de esta ecuación son los siguientes según las fórmulas de Cardano-Vieta:

1) Las sumas simples: $s_1 = 2(\cos A + \cos 3A + \cos 5A) = 1$,

(a partir de la identidad, para $n = 3$, $\cos A + \cos 3A + \cdots + \cos(2n-1)A = \frac{\operatorname{sen}(2nA)}{2\operatorname{sen} A}$

2) Las sumas dobles $s_2 = 4(\cos A\cos 3A + \cos 3A\cos 5A + \cos 5A\cos A)$

$$4\cos A\cos 3A = 2(\cos 4A + \cos 2A) = 2(\cos 2A - \cos 3A)$$

$$4\cos 3A\cos 5A = 2(\cos 8A + \cos 2A) = 2(-\cos A + \cos 2A)$$

$$4\cos 5A\cos A = 2(\cos 6A + \cos 4A) = 2(-\cos A - \cos 3A)$$

Sumando todo resulta $s_2 = 4[\cos 2A - (\cos A + \cos 3A)] = 4\left[\cos 2A - \left(\frac{1}{2} - \cos 5A\right)\right] = -2$

3) Las sumas triples (o producto en este caso):

$$s_3 = 8\cos A\cos 3A\cos 5A = 8\cos A\,(-\cos 4A)(-\cos 2A) = -1$$

(En el problema 963 obtuvimos para los cosenos $\cos A = \frac{b}{2a}; \cos 2A = \frac{c}{2b};\ \cos 4A = \frac{-a}{2c}$).

Con estos valores formamos el polinomio $q(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$, cuyos ceros son $2\cos A, 2\cos 3A$ y $2\cos 5A$.

Si queremos que sus raíces sean éstas, disminuidas en $3/2$ debemos hacer el cambio de variable $t = x + 3/2$.

El polinomio resultante es $(x + 3/2)^3 - (x + 3/2)^2 - 2(x + 3/2) + 1$, o si queremos que los coeficientes sean enteros, lo multiplicamos por 8 y sale finalmente

$$p(x) = (2x + 3)^3 - 2(2x + 3)^2 - 8(2x + 3) + 8 = 8x^3 + 28x^2 + 14x - 7$$

De ello se deduce que efectivamente se trata de un número algebraico en el cuerpo de los racionales.

b) inverso de $\theta = r/R$.

Los elementos de $Q\left(\frac{r}{R}\right) = Q(\theta)$ son polinomios en θ de grado menor que 3; es un anillo isomorfo al anillo cociente $Q[x]/(p(x))$.

Al ser $Q[x]$ un anillo principal, el ideal generado por el polinomio irreducible $p(x)$ es primo y por tanto máximo en él. Por consiguiente es un cuerpo.

Para hallar el inverso de θ ponemos $0 = p(\theta) = (8 \cdot \theta^2 + 28 \cdot \theta + 14) \cdot \theta - 7$, de donde resulta $\frac{1}{\theta} = \frac{8}{7}\theta^2 + 4\theta + 2 = 2/7(4\cos A + 8\cos 2A + 3)$

Y así tenemos el inverso calculado.

Cálculo de la razón r/R.

A) Expresión trigonométrica.

A partir del área del triángulo tenemos

$$rs = rR(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C) = \frac{abc}{4R} = \frac{8R^3 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C}{4R}, \text{ de donde } \frac{r}{R} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} 2A \cdot \operatorname{sen} 4A}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 4A}.$$

Vamos a simplificar esta expresión:

$$2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} 2A \cdot \operatorname{sen} 4A = 4\operatorname{sen}^2 A \cdot \cos A \cdot \operatorname{sen} 4A = 2\cos A(1 - \cos 2A) \cdot \operatorname{sen} 4A$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 4A = \operatorname{sen} 6A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 4A = 2\operatorname{sen} 4A \cdot \cos 2A + \operatorname{sen} 4A = (1 + 2\cos 2A) \cdot \operatorname{sen} 4A.$$

Tenemos ahora:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{r}{R}} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} 2A \cdot \operatorname{sen} 4A}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 4A} = \boldsymbol{\frac{2\cos A(1 - \cos 2A)}{1 + 2\cos 2A}} \quad (*)}$$

El punto clave del cálculo es el siguiente:

B) $\mathbf{2 \cdot \cos 2A\,(2 \cdot \cos A - 1) = 1}$.

En efecto

$$4\cos A\cos 2A - 2\cos 2A = 2(\cos 3A + \cos A) + 2\cos 5A = 2(\cos 3A + \cos A + \cos 5A) = 1$$

Dividiendo en la expresión $(*)$ por $2 \cdot \cos 2A$ tenemos

$$\frac{r}{R} = \frac{2\cos A(1 - \cos 2A)}{1 + 2\cos 2A} = \frac{2\cos A(1/(2\cos 2A) - 1/2)}{1/(2\cos 2A) + 1} = \frac{2\cos A(2\cos A - 3/2)}{2\cos A} = 2\cos A - 3/2$$

que es la expresión que más simplificada posible para este valor y es la que se encuentra en Internet en diversos documentos.■