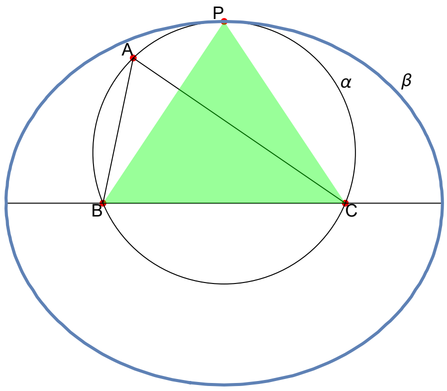
Pr. Cabri 1036

Enunciado

Dados 2 puntos, B y C sobre una circunferencia situar sobre la misma otro punto A tal qué el triángulo ABC tenga perímetro máximo.

Propuesto por César Beade Franco.

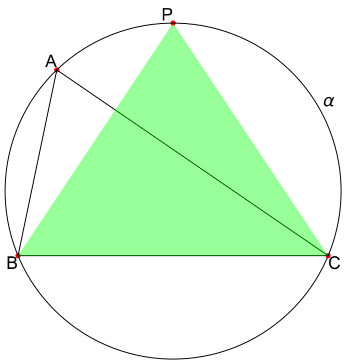
Solución visual



El vértice A ha de estar sobre el mayor de los arcos que determina el segmento BC sobre la circunferencia α que los contiene.

Tracemos la elipse β de focos B y C que pasa por P, punto donde se cortan la mediatriz de BC y α. α es interior a β y tagente a ella por P.
Si A perteneciente a α y distinto de P es interior a β sucede que AB+BC<PB+PC (eje mayor de la elipse). Así pues A=P, es decir ABC ha de ser isósceles.

Solución analítico-trigonométrica



Por el teorema de los senos $\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{AC}{\text{sen}B}=\frac{AB}{\text{sen}C}=\frac{AC+AB}{\text{sen}B+\text{sen}C}$ y también $\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{PC}{\text{sen}x}=\frac{PB}{\text{sen}x}=\frac{PC+PB}{2\,\text{sen}x}$, siendo x=PBC=PCB.
Por tanto $\frac{AC+AB}{\text{sen}B+\text{sen}C}=\frac{PC+PB}{2\,\text{sen}x}$ y como (*) senB+senC ≤ 2senx resulta que AC+AB ≤ PB+PC.

Falta demostrar la desigualdad (*), es decir, que si 2 ángulos x y k-x, suman una cantidad fija 0 < k < 180 (aquí k=180-A) la suma de sus senos es máxima si son

iguales.
Consideremos la función f(x)=senx+sen(k-x), derivando f'(x)=cosx-cos(k-x)=0 ⇒x=k-x ⇒ x=$\frac{k}{2}$.
Además f''(x)=-senx-sen(k-x) ⇒ f''($\frac{k}{2}$)=-2sen($\frac{k}{2}$)<0, por lo que f tiene un máximo en $\frac{k}{2}$. Y ambos ángulos son iguales.