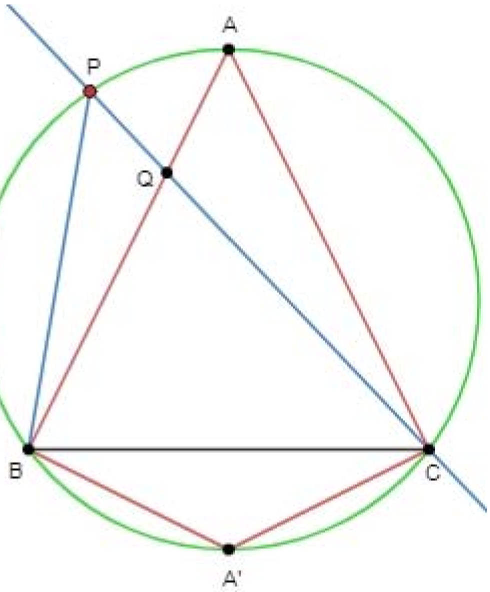
TRIÁNGULOS CABRI
1 al 14 de febrero de 2022

<u>Problema 1036.</u> (propuesto por César Beade Franco) Dados dos puntos B y C sobre una circunferencia, situar sobre la misma otro punto P tal que el triángulo PBC tenga perímetro máximo.

<u>Solución:</u>



Sean A y A' los dos puntos situados sobre la circunferencia considerada tales que los triángulos ABC y $A'CB$ son isósceles, siendo el triángulo ABC el de mayor altura de los dos. Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $c = b$, entonces, la ecuación de su circunferencia circunscrita (circunferencia considerada) es:

$$b^2xy + b^2xz + a^2xy = 0$$

y vamos a distinguir dos casos:

① Si el punto P está situado en el arco CB (podemos suponer que está situado sobre el arco AB, ya que, si estuviese situado en el arco CA, se razonaría de forma totalmente análoga) y $Q = (1-t : t : 0)$ $(0 \le t \le 1)$ es el punto de intersección entre la recta CP y el segmento AB, al ser:

$$CP = CQ \equiv tx - (1-t)y = 0$$

resulta que $P = ((1-t)[a^2t + b^2(1-t)] : t[a^2t + b^2(1-t)] : -t(1-t)b^2)$, siendo:

$$\begin{cases} PB = \dfrac{b^2(1-t)}{\sqrt{a^2t + b^2(1-t)^2}} \\ PC = \dfrac{a^2t + b^2(1-t)}{\sqrt{a^2t + b^2(1-t)^2}} \end{cases}$$

por lo que tenemos que maximizar la función $f : [0,1] \to [0, +\infty)$ definida por:

$$f(t) = \frac{b^2(1-t)}{\sqrt{a^2t + b^2(1-t)^2}} + \frac{a^2t + b^2(1-t)}{\sqrt{a^2t + b^2(1-t)^2}} = \frac{a^2t + 2b^2(1-t)}{\sqrt{a^2t + b^2(1-t)^2}}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

que es decreciente, pues:

$$\forall\ t \in [0,1] : f'(t) = \frac{a^2(a-2b)(a+2b)t}{2\sqrt{\left[a^2t + b^2(1-t)^2\right]^3}} \underset{-a+2b=-a+b+c>0}{\leq} 0$$

y, por tanto, alcanza su valor máximo para $t = 0,$ es decir, para $P = A.$

② Si el punto P está situado en el arco $BC,$ razonando de igual forma que en el caso anterior, el triángulo de mayor perímetro se obtendría cuando $P = A',$ siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} A'B \leq AB \\ A'C \leq AC \end{array} \right. \Rightarrow A'B + A'C \leq AB + AC$$

Por tanto, el punto P es el tercer vértice del mayor de los dos triángulos isósceles con base BC que puede inscribirse en la circunferencia dada (si BC fuese un diámetro de dicha circunferencia, entonces, habría dos posibles soluciones).