Quincena del 1 al 14 de de febrero de 2022

Propuesta de César Beade Franco, profesor de matemáticas jubilado de Cee (La Coruña)

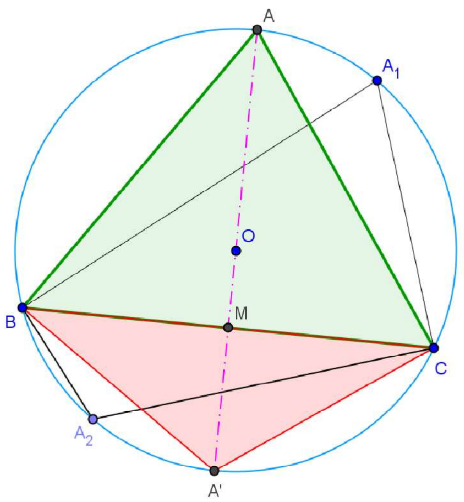
***Problema* 1036**

Dados dos puntos, B y C sobre una circunferencia situar sobre la misma otro punto A tal qué el triángulo ABC tenga perímetro máximo.

Beade, C. (2022): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

El perímetro del triángulo es:



$$\begin{aligned}2s &= 2R(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C\,) \\ &= 2R\Big[\operatorname{sen} A \\ &\quad + 2\operatorname{sen}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\Big] \\ &= 2R\Big[\operatorname{sen} A \\ &\quad + 2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\Big]\end{aligned}$$

El lado BC define dos semiplanos; tomamos el arco de circunferencia contenido en uno de ellos y en él un punto cualquiera A. El valor del ángulo $\sphericalangle BAC$ es constante y por tanto, el perímetro varía en función del coseno de la semidiferencia de los ángulos en B y C.

Ese coseno es máximo cuando el ángulo es nulo, por consiguiente, $B = C$.

Si se toma A en el otro semiplano, el cálculo es el mismo y también la conclusión, el perímetro máximo en cada caso se obtiene cuando el triángulo es isósceles, es decir, cuando A está en la mediatriz del segmento BC.

Hay dos triángulos en esa situación, con vértices A y A' diametralmente opuestos; uno de ellos contiene al centro de la circunferencia, ABC y su perímetro es mayor que el de $A'BC$ que no lo contiene. Basta con comparar los triángulos rectángulos ABM y $A'BM$, comparten un cateto, pero AM es mayor que $A'M$ y por tanto AB es mayor que $A'B$.

Concluyendo: el triángulo de mayor perímetro es el isósceles de base BC que contiene el centro O de la circunferencia en su interior. ■