

Pr. Cabri I037

Enunciado

Dado un triángulo ABC acutángulo en A, determinar el lugar geométrico que describe un punto P tal que: $PA^2 = PB^2 + PC^2$

Propuesto por Pérez, M. A. (2022).

Solución

Sea el triángulo $A(a,b)$, $B(-k,0)$ y $C(k,0)$ y un punto $P(x,y)$. Se ha de cumplir que

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x+k)^2 + y^2 + (x-k)^2 + y^2,$$

donde simplificando y reagrupando términos obtenemos

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = 2(a^2+b^2-k^2)$$

ecuación de una circunferencia centrada en $A'(-a,-b)$ simétrico de A respecto al punto

medio de BC. El radio de esta circunferencia es $\sqrt{2(a^2+b^2-k^2)}$, donde

$a^2 + b^2$ es el cuadrado de la distancia de A a M, siendo M punto medio de BC y k es BM.

Se ha de cumplir que $a^2 + b^2 > k^2$, condición que equivale a ser acutángulo en A.

