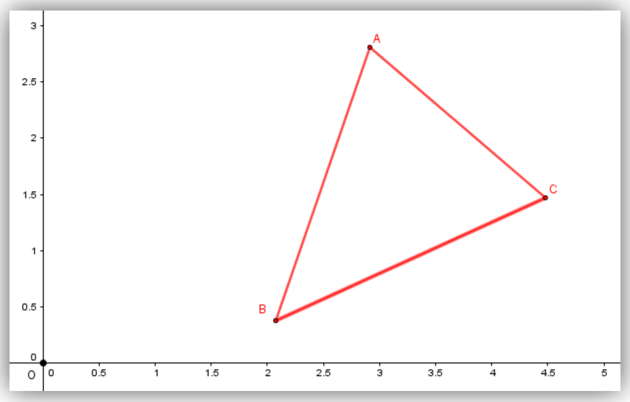
Problema 1037.-

Dado un triángulo ABC acutángulo en A, determinar el lugar geométrico que describe un punto P tal que: $PA^2 = PB^2 + PC^2$.

Miguel Ángel Pérez García-Ortega. (2022): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

En un sistema de referencia euclídeo dado, sea el triángulo ABC de vértices:



$A = (a_1, a_2); B = (b_1, b_2); C = (c_1, c_2)$.

Como quiera que el triángulo ha de ser acutángulo en A, si $\alpha = \measuredangle(\vec{a} - \vec{b}\,; \vec{a} - \vec{c})$, entonces $\cos \alpha > 0$.

Esta condición equivale a que el producto escalar $(\vec{a} - \vec{b}\,) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) > 0$ $(*)$, siendo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ los respectivos vectores de posición de los puntos A, B y C.

La condición para que un punto $P(x, y)$ pertenezca al lugar geométrico dado se expresaría del modo:

$$PA^2 = PB^2 + PC^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2$$

Reordenando las distintas potencias, obtenemos:

$$(x + a_1 - b_1 - c_1)^2 + (y + a_2 - b_2 - c_2)^2 = 2(a_1^2 + a_2^2 - a_1(b_1 + c_1) - a_2(b_2 + c_2) + b_1c_1 + b_2c_2)$$

$$(x + a_1 - b_1 - c_1)^2 + (y + a_2 - b_2 - c_2)^2 = 2(\vec{a} - \vec{b}\,) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) > 0 \ \ (*)$$

Esta expresión se correspondería con la circunferencia de centro el punto D (= punto simétrico de A respecto del punto medio del lado BC) y de radio r, siendo:

$$\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,;\ r = \sqrt{2(\vec{a} - \vec{b}\,) \cdot (\vec{a} - \vec{c})}.$$

Al ser este proceso reversible, el L. G. sería esta circunferencia.

Vectorialmente, podemos determinar dicha circunferencia del siguiente modo: