

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)

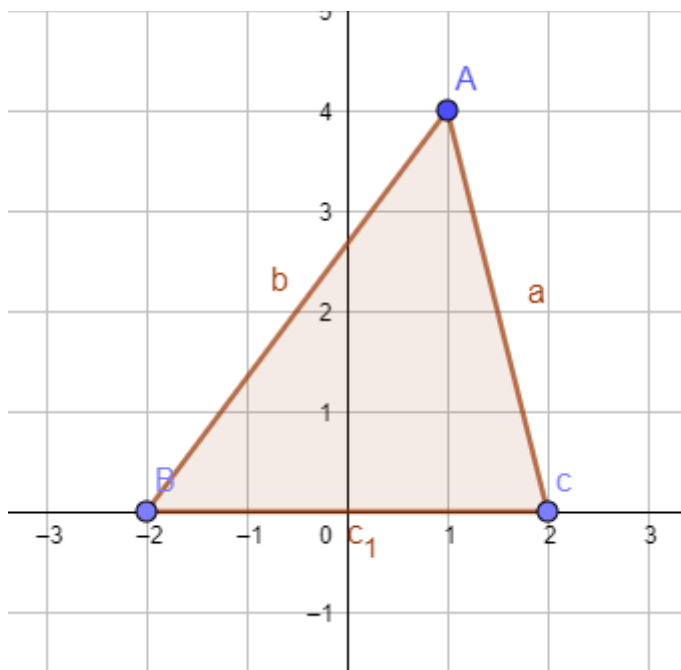
Problema 1037

Dado un triángulo ABC acutángulo en A, determinar el lugar geométrico que describe un punto P tal que: $PA^2 = PB^2 + PC^2$

Pérez, M. A. (2022): Comunicación personal.

Solución de casos particulares del director.

Tomemos el triángulo A(1,4) B(-2,0), C(2,0)



Sea P (x,y) un punto del plano tal que se verifique la igualdad, estudiemos los valores:

$$PA^2 = x^2 + 1 - 2x + y^2 + 16 - 8y$$

$$PB^2 = x^2 + 4 + 4x + y^2$$

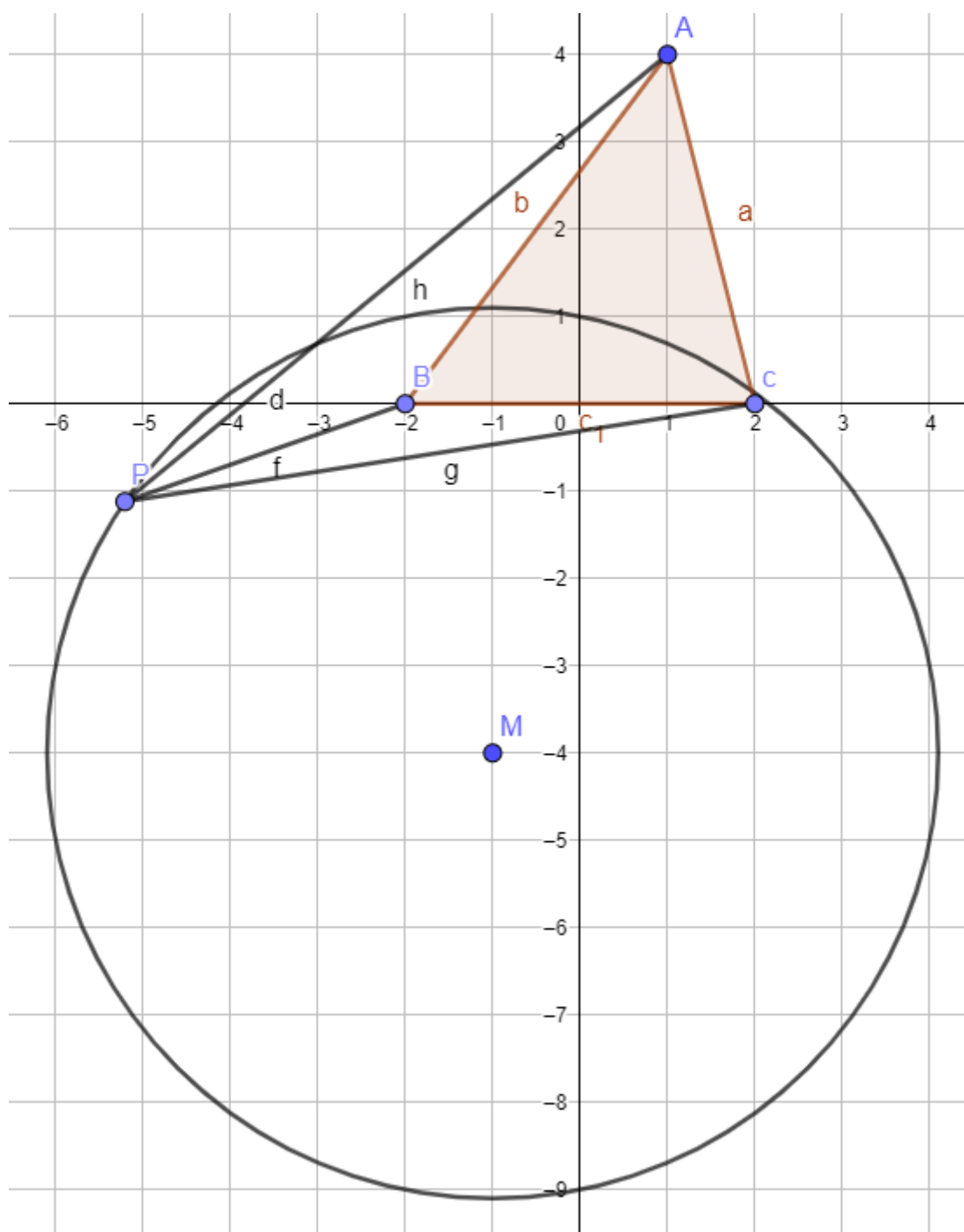
$$PC^2 = x^2 - 4 + 4x + y^2$$

De donde se tiene

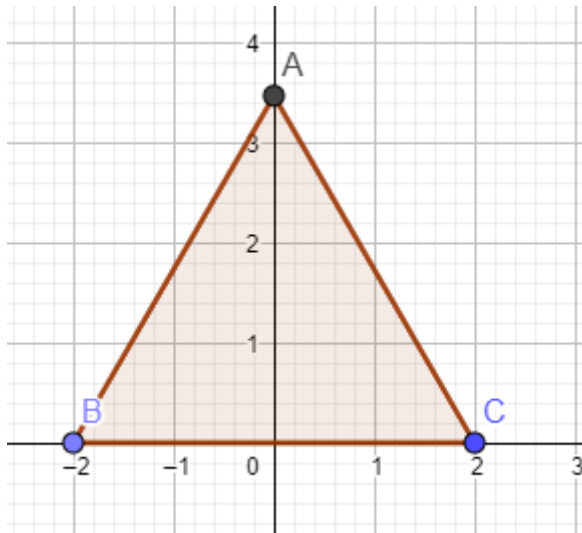
$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 16 - 8y = (x^2 + 4 + 4x + y^2) + (x^2 - 4 + 4x + y^2)$$

$$\text{Es decir: } x^2 + 2x + y^2 + 8y - 9 = 0$$

Luego el lugar pedido es una circunferencia de centro M(-1,-4) y radio $\sqrt{26}$



Tomemos un triángulo equilátero



Es por ejemplo, $A(0, \sqrt{12})$, $B(-2, 0)$, $C(2, 0)$

$$PA^2 = x^2 + y^2 - 2\sqrt{12}y + 12$$

$$PB^2 = x^2 + 4 + 4x + y^2$$

$$PC^2 = x^2 - 4 + 4x + y^2$$

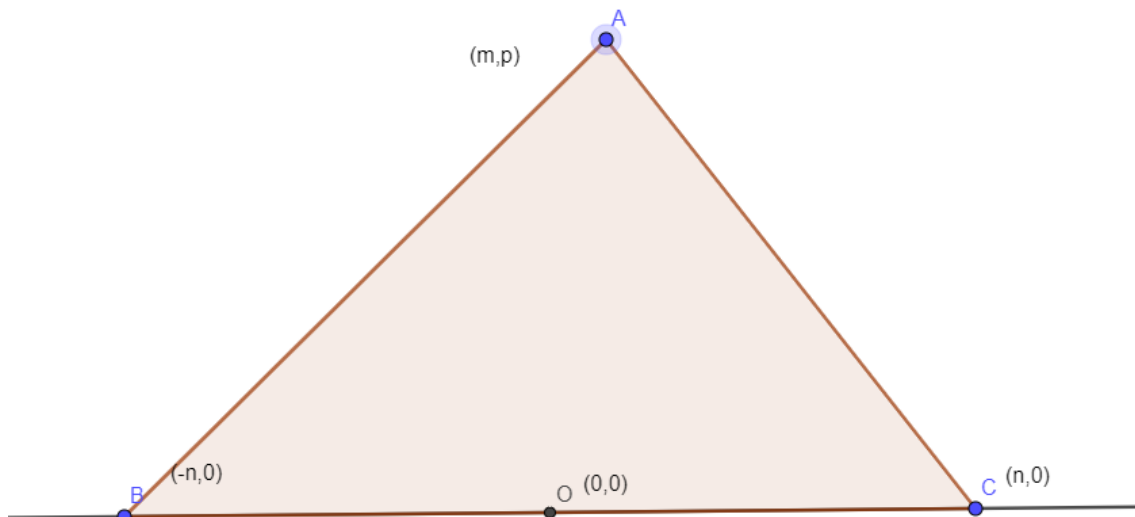
De donde se tiene

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{12}y + 12 = (x^2 + 4 + 4x + y^2) + (x^2 - 4 + 4x + y^2)$$

Es decir: $(y + \sqrt{12})^2 + x^2 = 16$

Luego el lugar pedido es una circunferencia de centro $M(0, -\sqrt{12})$ y radio 4

Sea un sistema de coordenadas cartesiano en el que el centro de coordenadas sea el punto medio del lado BC, con lo que $B(-n,0)$, y $C(n,0)$ y sea A de coordenadas $A(m,p)$



Sea $P(x,y)$ tal que se cumpla lo enunciado.

Es:

$$PA^2 = x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$PB^2 = x^2 + 2nx + n^2 + y^2$$

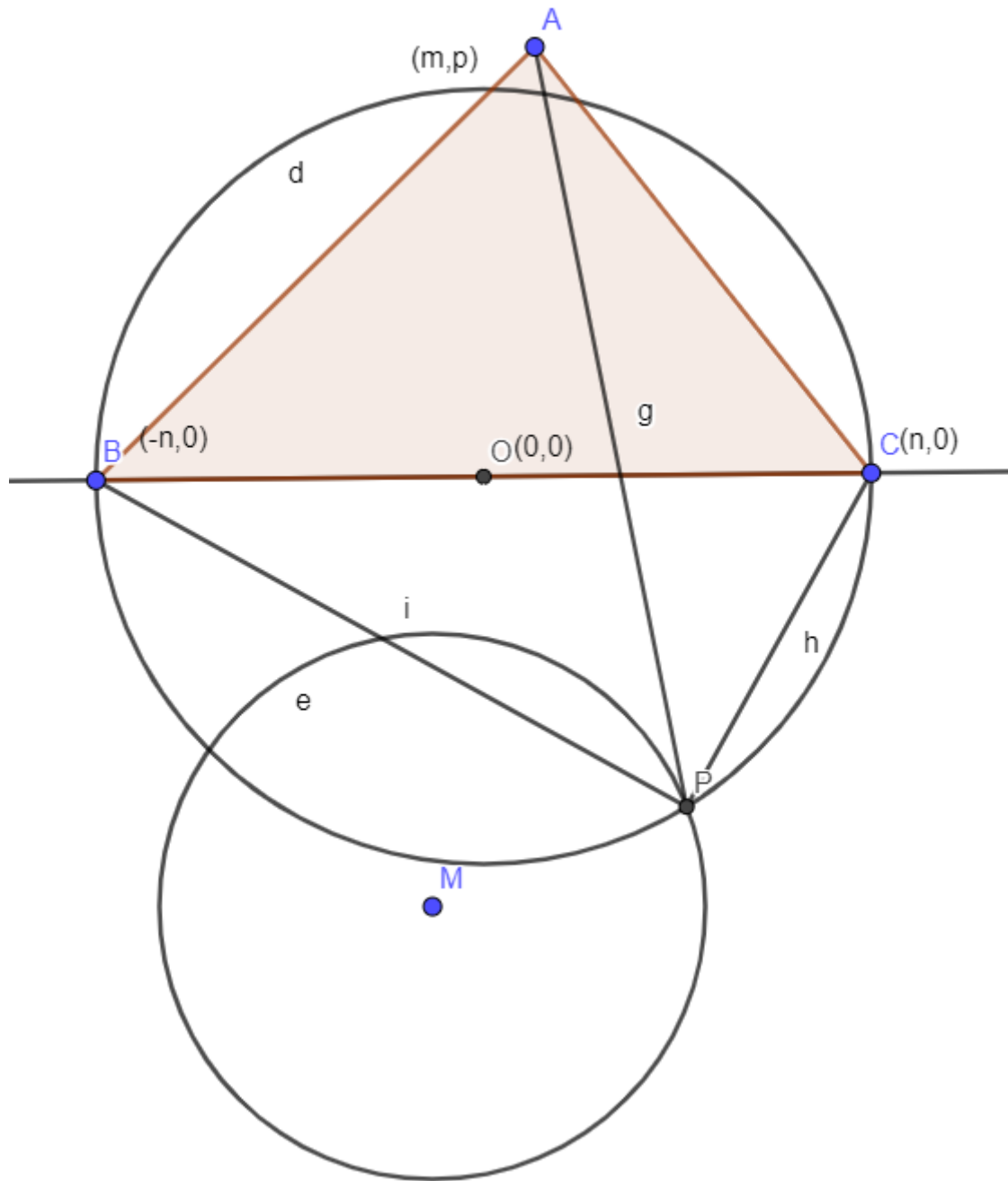
$$PC^2 = x^2 - 2nx + n^2 + y^2$$

Así la igualdad queda como:

$$x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2py + p^2 = (x^2 + 2nx + n^2 + y^2) + (x^2 - 2nx + n^2 + y^2), \text{ es decir,}$$

$$(x+m)^2 + (y+p)^2 = 2m^2 + 2p^2 - 2n^2$$

Por tanto es una circunferencia de centro $M(-m, -p)$ y radio $\sqrt{2m^2 + 2p^2 - 2n^2}$



Se concluye en el sentido de que ha de ser $2m^2+2p^2-2n^2 \geq 0$

Es decir el ángulo en A debe ser agudo o recto.

En el caso del triángulo rectángulo el lugar se reduce a un punto, el diametralmente opuesto a A.

Ricardo Barroso Campos. Jubilado,

Sevilla España