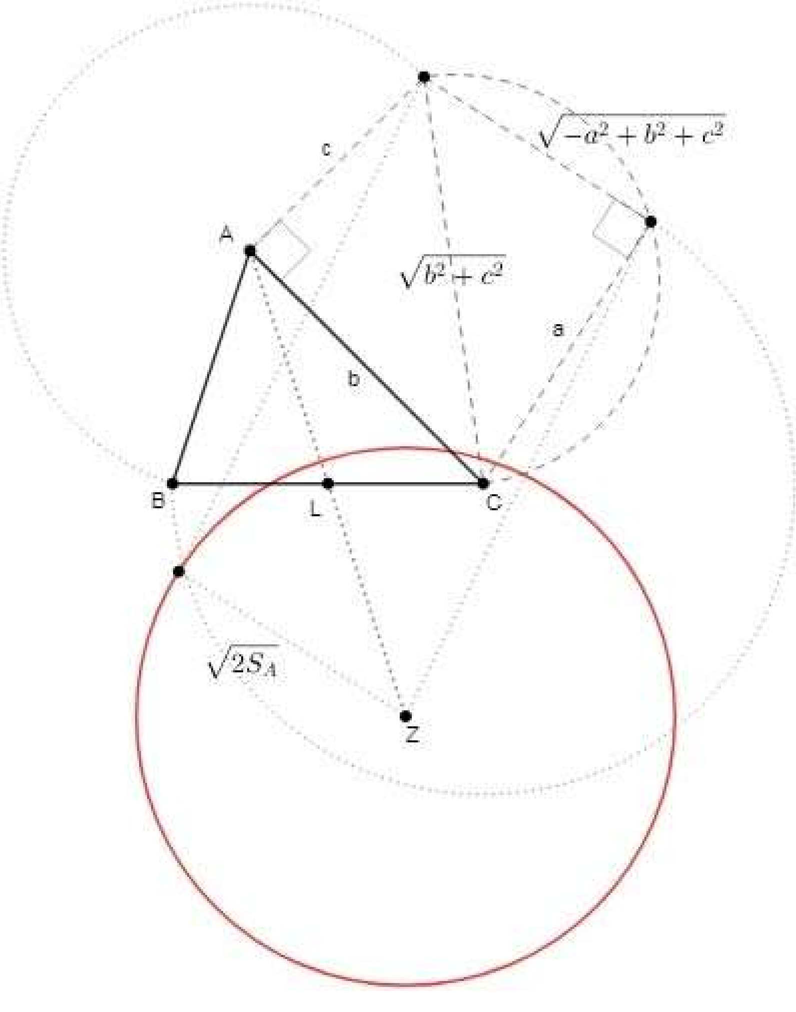
TRIÁNGULOS CABRI
15 al 28 de febrero de 2022

<u>Problema 1037.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC acutángulo en A, determinar y representar gráficamente el lugar geométrico que describe un punto P tal que:

$$PA^2 = PB^2 + PC^2$$

<u>Solución:</u>



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (u : v : w)$ $(u + v + w > 0)$, como:

$$\begin{cases} PA^2 = \dfrac{c^2v^2 - a^2vw + b^2vw + c^2vw + b^2w^2}{(u+v+w)^2} \\ PB^2 = \dfrac{c^2u^2 + a^2uw - b^2uw + c^2uw + a^2w^2}{(u+v+w)^2} \\ PC^2 = \dfrac{b^2u^2 + a^2uv + b^2uv - c^2uv + a^2v}{(u+v+w)^2} \end{cases}$$

entonces:

$$PA^2 = PB^2 + PC^2 \Leftrightarrow (b^2+c^2)u^2 + (a^2-c^2)v^2 + (a^2-b^2)w^2 + 2S_Cuv + 2S_Buw - 2S_Avw = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

lo cual significa que el punto P ha de estar situado sobre la cónica de ecuación:

$$(b^2+c^2)x^2+(a^2-c^2)y^2+(a^2-b^2)z^2+2S_Cxy+2S_Bxz-2S_Ayz=0$$

que puede reescribirse como:

$$c^2xy+b^2xz+a^2yz-[(b^2+c^2)x+(a^2-c^2)y+(a^2-b^2)z](x+y+z)=0$$

por lo que se trata de una circunferencia, cuyo centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto simétrico $Z=(-1:1:1)$ del punto A con respecto al punto medio $L=(0:1:1)$ del segmento BC y cuyo radio es:

$$\rho=\sqrt{\frac{c^2+2S_A+b^2}{1^2}-(b^2+c^2)}=\sqrt{2S_A}$$