Pr. Cabri 1038

Enunciado

A partir de un pentágono regular ABCDE de lado m, se construye un cuadrilátero NFMA de lados iguales, tomando el punto medio F de un lado DC y el vértice opuesto A.
La mediatriz de FA corta en N a ED y en M a BC. Sea r el inradio del triángulo AMF. Calcular r en función de m.

Propuesto por Isach: J.J: (2022).

Solución

Consideremos el pentágono regular con vértices en el círculo unidad, Vi=($\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$, $\mathrm{Sen}\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$), i = 0,...,4, con V1=A, V2=B, etc.

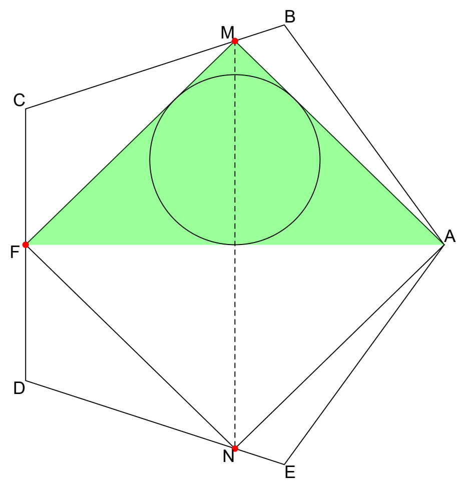
En esas condiciones F= $(\mathrm{Cos}\left(\frac{4\pi}{5}\right),\ 0)$ =($\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\right)$,0) y M = $\left(\frac{1}{8}\left(3-\sqrt{5}\right),\ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)}\ \right)$

El lado del pentágono mide m = $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)}$

En esas condiciones F= $(\mathrm{Cos}\left(\frac{4\pi}{5}\right),\ 0)$ = $\frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{5}\right)$ y M = $\left(\frac{1}{8}\left(3-\sqrt{5}\right),\ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)}\ \right)$

En estas condiciones el inradio de AMF es r= $\frac{1}{12}\sqrt{\frac{5}{2}\left(77+31\sqrt{5}-8\sqrt{150+67\sqrt{5}}\right)}$ o bien, dado que m= $\sqrt{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)}$,

podemos escribir r = $\frac{m}{12}\left(-5-2\sqrt{5}+\sqrt{90+38\sqrt{5}}\right)$



Podríamos expresar también M y F en función de m,

$F\left(-\sqrt{\frac{4-m^2}{4}},\ 0\right)$,$M(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{4-m^2}\right),\ \frac{3\,m}{4})$.

Así obtendríamos r= $\frac{3\,m\left(2+\sqrt{4-m^2}\right)}{4\left(2+\sqrt{4-m^2}+2\sqrt{2+2\,m^2+\sqrt{4-m^2}}\right)}$.