

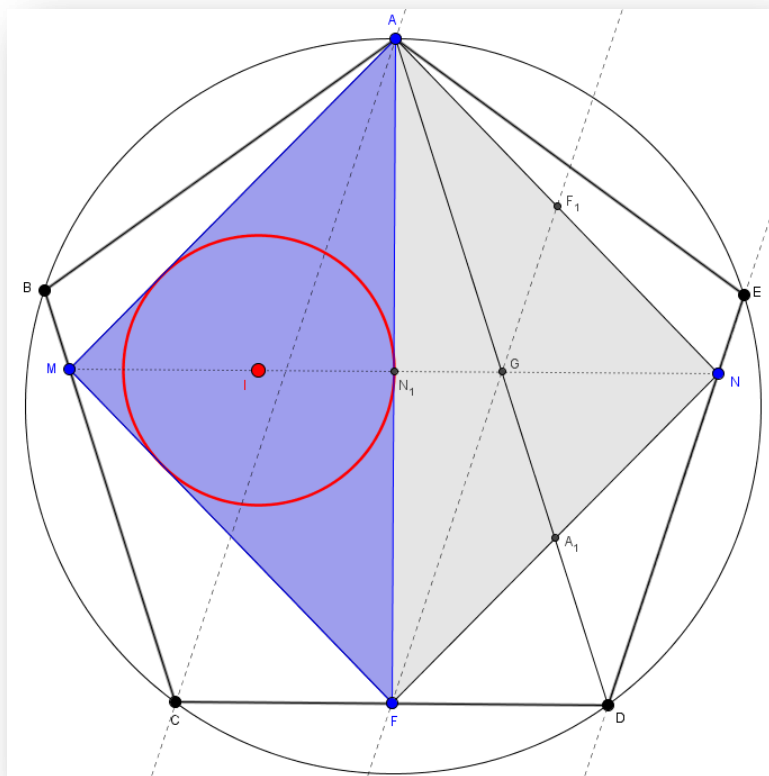
Problema 1038.-

A partir de un pentágono regular ABCDE de lado m , se construye un cuadrilátero NFMA de lados iguales, tomando el punto medio F de un lado DC y el vértice opuesto A . La mediatriz de FA corta en N a ED y en M a BC . Sea r el inradio del triángulo AMF . Calcular r en función de m .

Este problema está inspirado en un problema de Fletcher Mattox y ha sido publicado en el grupo Perú Geométrico.

Isach: J.J: (2022): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).



Una vez construido el cuadrilátero NFMA, observamos los siguientes hechos de interés.

En el triángulo $\triangle ANF$ ($\triangle AMF$), la paralela media entre la diagonal AC y el lado DE corta al lado AN en su punto medio, F_1 . Por tanto esta paralela media es la mediana en F . Si trazamos ahora la mediana NN_1 , ambas cevianas se cortarán en el punto G , baricentro del $\triangle ANF$.

Ahora bien, este punto G es un vértice del paralelogramo $FGND$.

De este modo $GN = FD = \frac{m}{2}$.

Como G es baricentro, $GN_1 = \frac{1}{2}GN$.

En definitiva, $NN_1 = \frac{3}{4}m$.

Por fin, $MN = \frac{3}{2}m$.

Ya tenemos una diagonal del rombo NFMA.

Para calcular la otra diagonal AF , bastará aplicar Pitágoras en el triángulo rectángulo AFD .

$$AF = \frac{m}{2} \sqrt{4\phi + 3}; \text{ siendo } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De esta manera podemos hallar el área S del $\triangle ANF$.

$$S = \frac{1}{2} [ANFM] = \frac{1}{2} \cdot \frac{MN \cdot AF}{2} = \frac{3m^2}{16} \sqrt{4\phi + 3}.$$

Ahora bien, como $S = p \cdot r \rightarrow r = \frac{S}{p}$, p = semiperímetro del $\triangle ANF$.

$$\text{Como quiera que } AM^2 = \left(\frac{MN}{2}\right)^2 + \left(\frac{AF}{2}\right)^2 \rightarrow AM = \frac{m}{2} \sqrt{\phi + 3}.$$

En definitiva,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{1}{12} m \cdot \left(2\sqrt{19\phi + 13} - (4\phi + 3)\right) = \frac{1}{60} m \cdot (5 + 2\sqrt{5}) \left(\sqrt{250 - 90\sqrt{5}} - 5\right)$$

$$r \approx 0.31295905841 m$$