

Propuesto por Juan José Isach Mayo, Profesor de Matemáticas (Jubilado) ..

Problema 1038

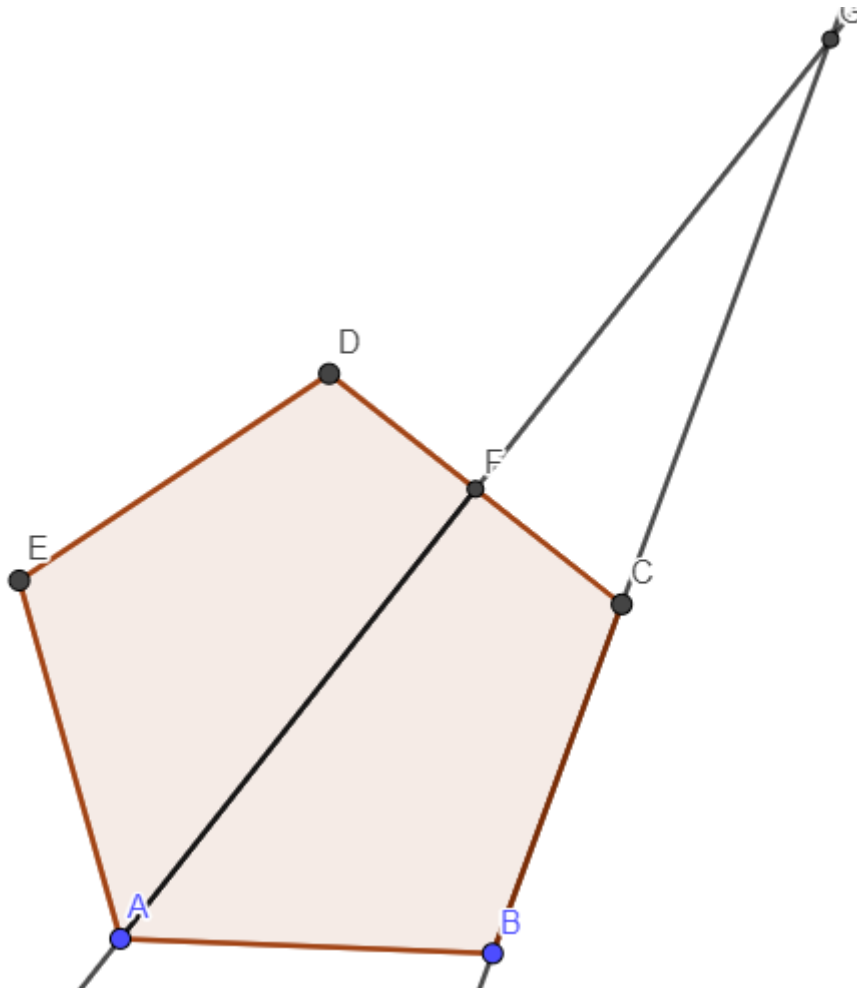
A partir de un pentágono regular $ABCDE$ de lado m , se construye un cuadrilátero $NFMA$ de lados iguales, tomando el punto medio F de un lado DC y el vértice opuesto A .

La mediatriz de FA corta en N a ED y en M a BC . Sea r el inradio del triángulo AMF . Calcular r en función de m .

Este problema está inspirado en un problema de [Fletcher Mattox](#) y ha sido publicado en el grupo [Perú Geométrico](#).

Isach: J.J: (2022): Comunicación personal.

Solución del director



Sea G la intersección de las rectas BC y AF .

Es por construcción $\angle ABG = 108^\circ$, $\angle GAB = 54^\circ$, $\angle AGB = 18^\circ$

Por el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\sin 18^\circ} = \frac{AG}{\sin 108^\circ} = \frac{BG}{\sin 54^\circ}, \text{ de donde } AG = \frac{AB \sin 108^\circ}{\sin 18^\circ}$$

Y en el triángulo FCG es $FC = AB/2$, $\angle FCG = 72^\circ$, $\angle CFG = 90^\circ$, $\angle FGC = 18^\circ$

$$\text{Por lo que } FG = \frac{\frac{AB}{2} \sin(72^\circ)}{\sin(18^\circ)} = \frac{AB \sin 108^\circ}{2 \sin 18^\circ}$$

$$\text{Así } AF = AG - FG = \frac{AB \sin 108^\circ}{2 \sin 18^\circ}$$

La mediatriz de AF cortará a la recta AB en H, tal que $\angle IHA = 36^\circ$ por lo que $\angle HMB = \angle HBM = 72^\circ$, y $MH = BH$:

$$AH = \frac{AF/2}{\sin(36^\circ)} = \frac{AB \sin 108^\circ}{4 \sin 18^\circ \sin 36^\circ}$$

$$IH = AH \sin(54^\circ) = \frac{AB \sin 108^\circ \sin 54^\circ}{4 \sin 18^\circ \sin 36^\circ}$$

$$BH = \frac{AB \sin 108^\circ}{4 \sin 18^\circ \sin 36^\circ} AB$$

$$\text{Por lo que } IM = AB + \frac{AB \sin 108^\circ \sin 54^\circ}{4 \sin 18^\circ \sin 36^\circ} - \frac{AB \sin 108^\circ}{4 \sin 18^\circ \sin 36^\circ}$$

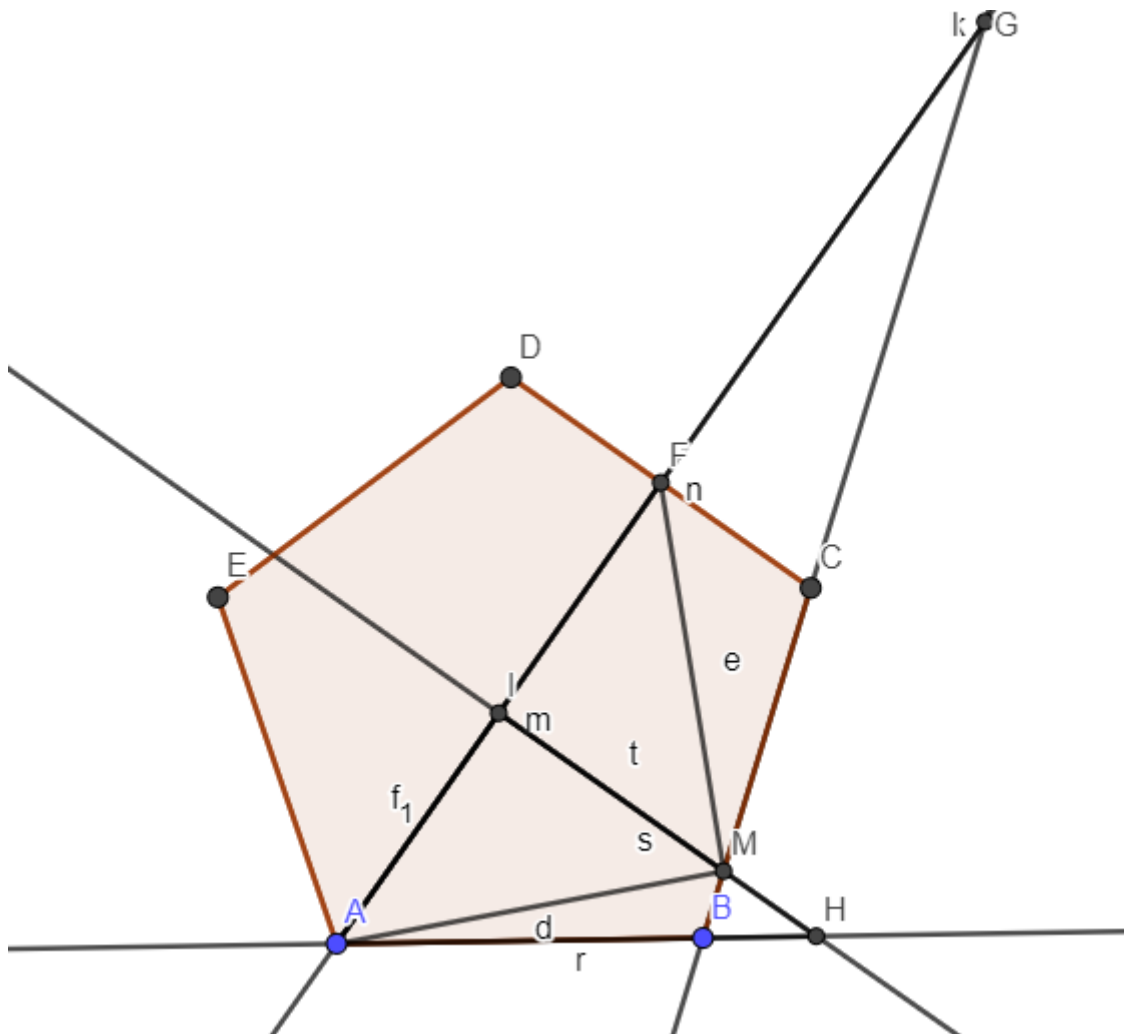
Utilizando la web

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/Valores_trigonometricos_exactos_de_la_funcion_seno_y_coseno.pdf

$$\text{se tiene que } \sin 108^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \approx 0.9510, \sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.8090, \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0.3090$$

$$\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \approx 0.5877$$

$$\text{Así } IM \approx 0.7499 AB, AI \approx 0.7690 AB$$



Por lo que el triángulo AMF

$$AF \approx 1.538m, AM=FM=\sqrt{(0.7690\text{ m})^2 + (0.7499\text{ m})^2} \approx 1.074m$$

Con estos datos tenemos:

$$r = \frac{2[AMF]}{AM+AF+FM} = \frac{2\text{ AI IM}}{2AM+AF} \approx 0.313m$$

Ricardo Barroso Campos

Jubilado. Sevilla