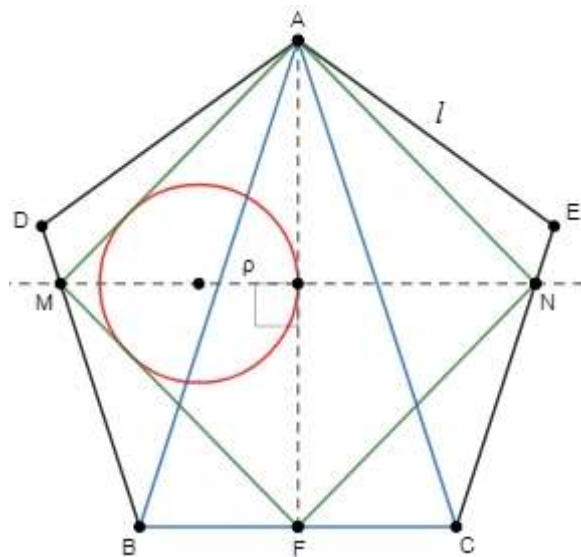


TRIÁNGULOS CABRI

15 al 28 de febrero de 2022

Problema 1038. (propuesto por Juan-José Isach Mayo) A partir de un pentágono regular $ADBCE$ de lado l , se construye un cuadrilátero $MFNA$ de lados iguales, tomando el punto medio F del lado BC y el vértice opuesto A . La mediatriz del segmento FA corta en N a CE y en M a DB . Sea ρ el inradio del triángulo AMF . Calcular ρ en función de l .



Solución:

Como $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, en todos los cálculos que se realizarán a continuación, se tendrán en cuenta los restos módulo este polinomio. Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que lado del pentágono tiene longitud unidad, por lo que, para el triángulo ABC , se verifica que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = c = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = \frac{2\phi + 1}{2} \\ S_B = S_C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, como la ecuación de la recta paralela a AC pasando por B es:

$$x + z = 0$$

y la ecuación de la mediatriz del segmento FA (pasa por los puntos medios $(1 : 1 : 0)$ y $(1 : 0 : 1)$ de los segmentos AB y AC , respectivamente) es:

$$x - y - z = 0$$

resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que $M = (1 : -1 : 2) = \left(\frac{1}{2} : -\frac{1}{2} : 1\right)$. Además, utilizando el Teorema de Pitágoras, resulta que:

$$AF = \sqrt{\phi^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{4\phi + 3}}{2}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

15 al 28 de febrero de 2022

y como:

$$AM = \sqrt{S_A \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + S_B \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + S_C (0 - 1)^2} = \frac{\sqrt{\phi + 3}}{2}$$

entonces:

$$\rho^2 = \frac{(-AM + MF + AF)(AM - MF + AF)(AM + MF - AF)}{4(AM + MF + AF)} \stackrel{MF=AM}{=} \frac{AF^2(2AM - AF)}{4(2AM + AF)} = \frac{(4\phi + 3) \left(\sqrt{\phi + 3} - \frac{\sqrt{4\phi + 3}}{2} \right)}{16 \left(\left(\sqrt{\phi + 3} + \frac{\sqrt{4\phi + 3}}{2} \right) \right)}$$

por lo que:

$$\rho^2 = \frac{(4\phi + 3) \left(2\sqrt{\phi + 3} - \sqrt{4\phi + 3} \right)}{16 \left(2\sqrt{\phi + 3} + \sqrt{4\phi + 3} \right)} = \frac{(4\phi + 3) \left(2\sqrt{\phi + 3} - \sqrt{4\phi + 3} \right)^2}{144}$$

y, por tanto:

$$\rho = \frac{\left(2\sqrt{\phi + 3} - \sqrt{4\phi + 3} \right) \sqrt{4\phi + 3}}{12} = \frac{2\sqrt{19\phi + 13} - (4\phi + 3)}{12} = \frac{\sqrt{2(19\sqrt{5} + 45)} - 2\sqrt{5} - 5}{12}$$

Finalmente, si el lado del pentágono $ADBCE$ tuviese longitud l , entonces, el inradio pedido sería:

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{2(19\sqrt{5} + 45)} - 2\sqrt{5} - 5}{12} \right) l$$