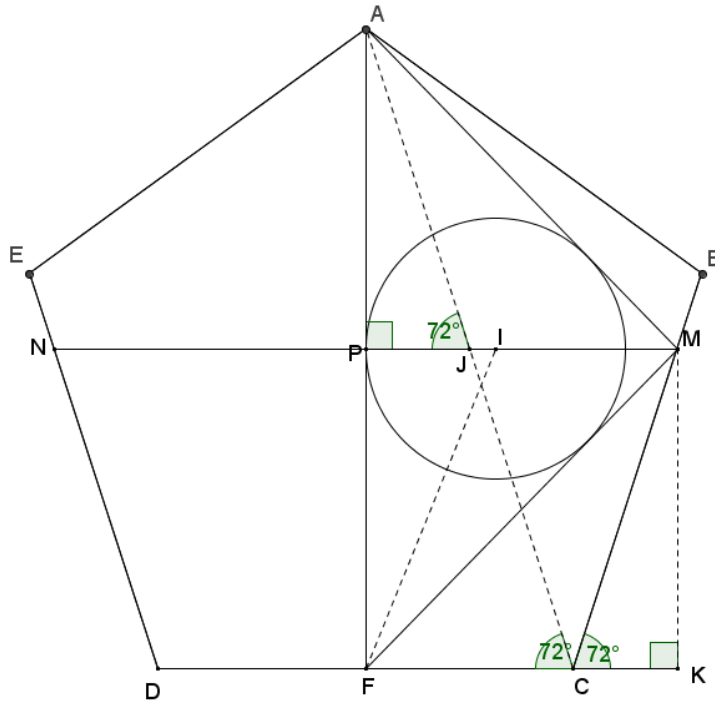


Problema n° 1038

A partir de un pentágono regular ABCDE de lado m, se construye un cuadrilátero NFMA de lados iguales, tomando el punto medio F de un lado DC y el vértice opuesto A. La mediatriz de FA corta en N a ED y en M a BC. Sea r el inradio del triángulo AMF. Calcular r en función de m.

Este problema está inspirado en un problema de [Fletcher Mattox](#) y ha sido publicado en el grupo [Perú Geométrico](#). Isach: J.J: (2022): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Par hypothèse $AB = BC = CD = m$.

P est le milieu de AF, J est à l'intersection de MP et de AC, K est la projection de M sur la droite [CD], I est le centre du cercle inscrit du triangle AMF.

Il s'agit de calculer $r = IP$.

FI est la bissectrice de l'angle en F du triangle MFP.

On a donc la relation $IP/FP = IM/FM = (IP + IM)/(FP + FM) = MP/FP + FM \rightarrow r = FP \cdot MP / (FP + FM)$

Comme P est milieu de AF et que $\angle AJP = \angle ACF = \angle MCK = 72^\circ$, les deux triangles APJ et MKC sont isométriques. D'où $CK = PJ = FC/2 \rightarrow MP = FK = 3CD/4 = 3m/4$.

Par ailleurs $FP = AF/2 = FC \cdot \tan(72^\circ) = m \cdot \tan(72^\circ)/4$ et $FM = \sqrt{FP^2 + PM^2} = \sqrt{m^2 \cdot \tan^2(72^\circ)/16 + 9m^2/16}$

$$\text{Il en résulte : } r = \frac{3m \tan(72^\circ)}{4[\sqrt{\tan^2(72^\circ) + 9} + \tan(72^\circ)]} = \frac{3m}{4[\sqrt{1 + 9 \cot^2(72^\circ)} + 1]}$$

$$\text{Or } \tan(72^\circ) = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ et } \cot(72^\circ) = 1/\tan(72^\circ) = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

$$\text{D'où } r/m = \frac{3}{4[\sqrt{1 + 9 \cot^2(72^\circ)} + 1]} = \frac{3}{4[\sqrt{10 - \frac{18}{\sqrt{5}}} + 1]} = 0,312959 \dots$$