Pr. Cabri 1039

Enunciado

Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que la A-Soddy hipérbola del triángulo ABC (hipérbola que pasa por el punto A y cuyos focos son los puntos B y C) pase por el ortocentro del triángulo ABC.

Propuesto por Pérez, M. A. (2022).

Solución

Consideremos el triángulo A(a,b), B(-1,0) y C(1,0) de ortocentro H(a,$-\frac{-2+2a^2}{2b}$) Si los puntos A y H pertenecen a una hipérbola de focos B y C se ha de verificar
|AB|-|AC| = |HB|-|HC|, que para los puntos citados nos da la ecuación $-\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{(1+a)^2+b^2} = \sqrt{(-1+a)^2+\frac{(-2+2a^2)^2}{4b^2}} - \sqrt{(1+a)^2+\frac{(-2+2a^2)^2}{4b^2}}$, con soluciones $b = \sqrt{1-a^2}$ y $b = \sqrt{a^2-1}$, o lo que es lo mismo, $a^2+b^2 = 1$ y $a^2-b^2 = 1$.
Es decir el lugar geométrico buscado está constituído por la circunferencia de diámetro BC y por la hipérbola equilátera de eje BC.
En el primer caso el ortocentro de ABC coincide con el vértice A.

Out[367]=