TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de marzo de 2022

Problema 1039. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que la A-Soddy hipérbola del triángulo ABC (hipérbola que pasa por el punto A y cuyos focos son los puntos B y C) pase por el ortocentro del triángulo ABC.

Solución:

Si A es uno de estos puntos, para que pueda existir la A-Soddy hipérbola del triángulo ABC, debe ocurrir que A no esté situado sobre la mediatriz del segmento BC, por lo que podemos suponer (en caso contrario se razonaría de forma totalmente análoga) que $b = AC > AB = c$ y, por tanto, cualquier punto P situado sobre esta hipérbola debe verificar que:

$$|PB - PC| = |AB - AC| = |c - b| = b - c$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC:

① Como el centro de esta hipérbola (punto medio del segmento determinado por sus focos) es el punto medio $L = (0 : 1 : 1)$ del segmento BC, entonces, también pasará por el punto simétrico $A' = (-1 : 1 : 1)$ del punto A con respecto al punto L.

② Si $Q = (0 : q : 1 - q)\ (0 < q < 1)$ es un punto de intersección de esta hipérbola con el segmento BC, entonces:

$$b - c = |QB - QC| = |a(1 - q) - aq| = a|1 - 2q|$$

por lo que:

$$\left\{\begin{array}{c} b - c = a(1 - 2q) \\ \text{ó} \\ b - c = a(2q - 1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} q = \dfrac{a - b + c}{2a} \\ \text{ó} \\ q = \dfrac{a + b - c}{2a} \end{array}\right.$$

y, por tanto, los puntos de intersección entre esta hipérbola y el segmento BC son el punto $Q_1 = (0 : a + b - c : a - b + c)$ de contacto de dicho segmento con el incírculo del triángulo ABC y el punto $Q_2 = (0 : a - b + c : a + b - c)$ de contacto de dicho segmento con el A-excírculo del triángulo ABC.

③ Si $J = (t : 0 : 1 - t)\ (0 < t < 1)$ es un punto de intersección entre de esta hipérbola con el segmento AC (si fuese $b < c$ esta hipérbola cortaría al segmento AB), entonces:

$$b - c = |JB - JC| \underset{*}{=} JB - JC = \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2 - c^2)t + b^2 t^2} - bt \Rightarrow t = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{(a - b)^2 + 2b^2 - c^2}$$

(el punto J está situado en el semiplano cuyos puntos distan más de B que de C)

por lo que $J = ((a - b + c)(a + b - c) : 0 : 4b(b - c))$.

Una vez conocidos cinco puntos de esta hipérbola, podemos hallar su ecuación:

$$(a - b + c)(a + b - c)y^2 + (a - b + c)(a + b - c)z^2 + 4c(b - c)xy - 4b(b - c)xz - 2\left[a^2 + (b - c)^2\right]yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

por lo que, imponiendo que pase por el ortocentro $H=(S_BS_C:S_AS_C:S_AS_B)$ del triángulo ABC, resulta que:

$$16(b-c)^2(-a+b+c)(a+b+c)S_A(b^2S_B+c^2S_C)=0 \Rightarrow \begin{cases} S_A=0 \\ \text{ó} \\ b^2S_B+c^2S_C=0 \end{cases}$$

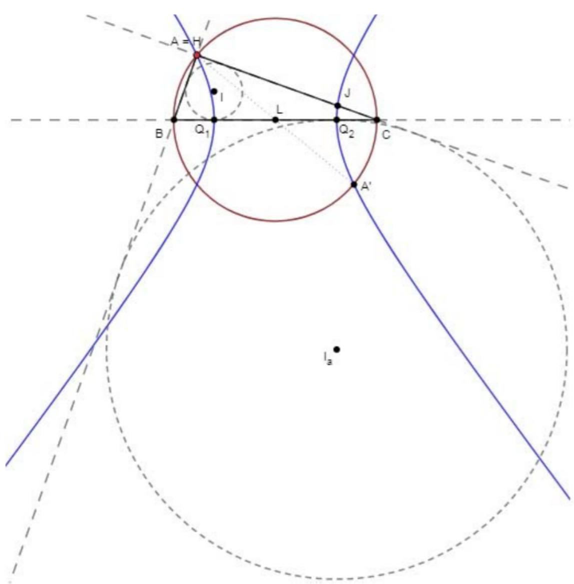
Finalmente, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio L del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A=(x,y)\ (y\neq 0)$, como:

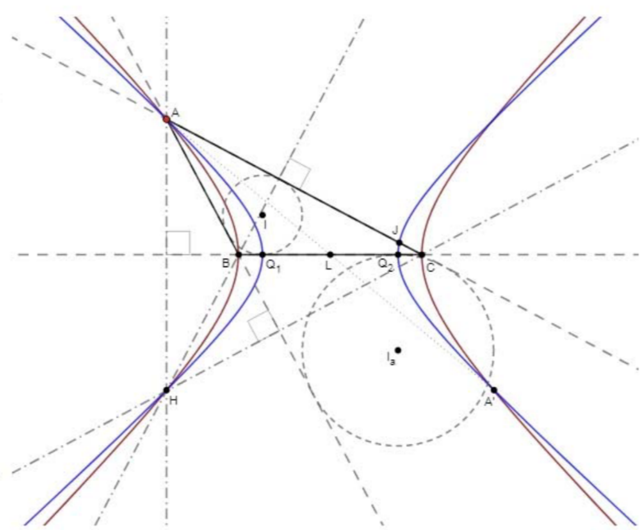
$$\begin{cases} C=(1,0) \\ B=(-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=BC=2 \\ b=AC=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ c=AB=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \text{ó} \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$$

por lo que el lugar geométrico pedido es la unión de la circunferencia con diámetro BC (lo cual era de esperar, ya que, en este caso, $H=A$) y la hipérbola equilátera cuyos vértices son los puntos B y C.





Miguel-Ángel Pérez García Ortega