Problema 1040.

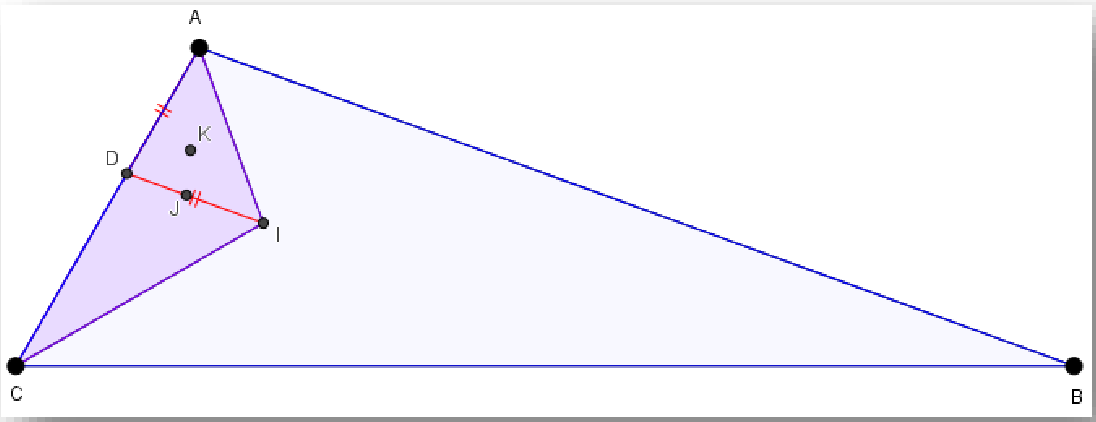
Se considera un triángulo ABC tal que $3\angle BAC + \angle ACB = 2\pi$. Sean I y r el incentro y el inradio del triángulo ABC. Sean $J\ y\ r_1$. el incentro y el inradio del triángulo AIC. Sea D el punto de intersección de las rectas IJ y AC. Finalmente, sean $K\ y\ r_2$ el incentro y el inradio del triángulo AID. Probar que: $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$.

Propuesto por Marian Cucoanes, Rumanía, y Juan José Isach Mayo, España.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sean $\alpha = \measuredangle BAC; \beta = \measuredangle ABC;\ \gamma = \measuredangle ACB$ y, como es habitual $a = BC; b = AC, c = AB$.

Sean los puntos $I, J\ y\ K$ los centros de las circunferencias inscritas en los triángulos $\Delta ABC,\ \Delta AIC\ \ y\ \ \Delta AID,$ de radios $r,\ r_1\ \ y\ \ r_2$, respectivamente. Si se verifica, $3\angle BAC + \angle ACB = 2\pi \rightarrow \begin{cases} \measuredangle BAC = \alpha \\ \measuredangle ABC = 2\alpha - \pi\ ;\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}; \\ \measuredangle ACB = 2\pi - 3\alpha \end{cases}$



Los ángulos de los triángulos AIC y AID quedan determinados por los valores siguientes:

$$\Delta AIC: \begin{cases} \measuredangle CAI = \dfrac{\alpha}{2} \\ \measuredangle AIC = \alpha \\ \measuredangle ICA = \pi - \dfrac{3\alpha}{2} \end{cases} ; \qquad \Delta AID: \begin{cases} \measuredangle DAI = \dfrac{\alpha}{2} \\ \measuredangle AID = \dfrac{\alpha}{2} \\ \measuredangle IDA = \pi - \alpha \end{cases}$$

Por tanto, resulta que el ΔAID es isósceles, siendo $DA = DI$. Como quiera que IJ es una bisectriz del ΔAIC, tenemos que, por el Teorema de la bisectriz:

$$\frac{AI}{AD} = \frac{CI}{CD} = \frac{AI + CI}{AD + CD} = \frac{AI + CI}{AC}\ (*)$$

Dado un triángulo ΔMNP, denotamos por $[MNP]$, al valor de su área. Sabemos que $[MNP] = s \cdot r$, siendo s= semiperímetro y r= radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

La relación a probar:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \Leftrightarrow \frac{AI + ID + DA}{2[AID]} = \frac{1}{r} + \frac{AI + IC + CA}{2[AIC]} \Leftrightarrow \frac{AI + ID + DA}{AD \cdot r} = \frac{1}{r} + \frac{AI + IC + CA}{AC \cdot r}$$

Ahora bien,

$$\frac{AI + ID + DA}{AD \cdot r} = \frac{1}{r} + \frac{AI + IC + CA}{AC \cdot r} \Leftrightarrow \frac{AI + 2 \cdot DA}{AD} = 1 + \frac{AI + IC}{AC} + 1 \Leftrightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{AI + IC}{AC} (*)$$

En definitiva,

$$\boldsymbol{\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\ \ cqd} \qquad \blacksquare$$