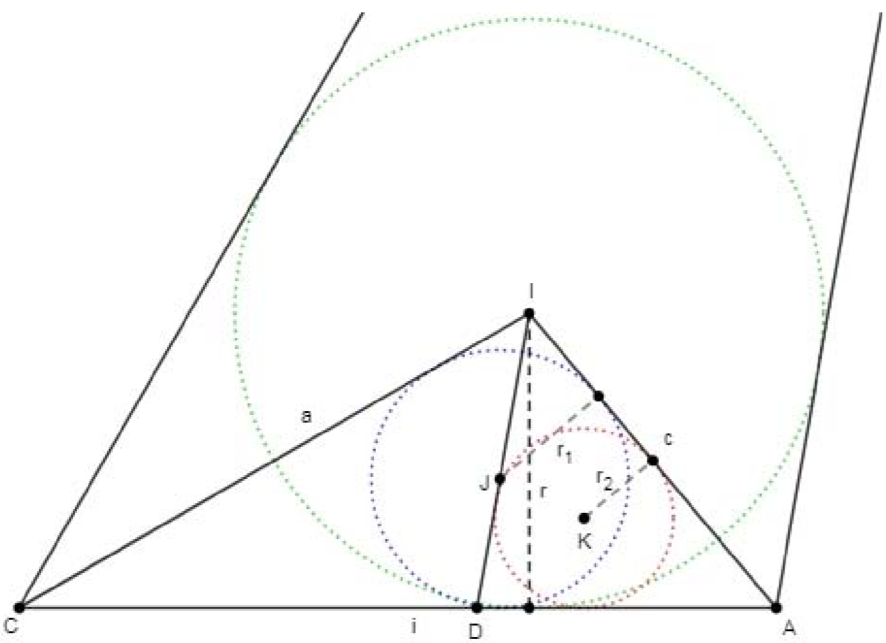
TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de marzo de 2022

Problema 1040. (propuesto por Marian Cucoanes y Juan-José Isach Mayo) Se considera un triángulo ABC tal que $3\measuredangle BAC + \measuredangle ACB = 2\pi$. Sean I y r el incentro y el inradio, respectivamente, del triángulo ABC. Sean J y r_1 el incentro y el inradio, respectivamente, del triángulo AIC. Sea D el punto de intersección entre las rectas IJ y AC. Finalmente, sean K y r_2 el incentro y el inradio, respectivamente, del triángulo AID. Probar que:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$$

Solución:

Fijándonos en el triángulo AIC:



y llamando Δ a su área, se verifica que:

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{ir}{2} \\ \Delta = \left(\dfrac{a+i+c}{2}\right) r_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{2\Delta}{i} \\ r_1 = \dfrac{2\Delta}{a+i+c} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{i}{2\Delta} + \frac{a+i+c}{2\Delta} = \frac{a+2i+c}{2\Delta}$$

Además, según el Teorema de la Bisectriz:

$$AD = \frac{ic}{a+c}$$

por lo que, como los triángulos AIC y AID tienen la misma altura, resulta que:

$$(AID) = \left(\frac{AD}{AC}\right)\Delta = \left(\frac{\frac{ic}{a+c}}{i}\right)\Delta = \frac{c\Delta}{a+c}$$

y como:

$$3\measuredangle IAC + \measuredangle ACI = \frac{3\measuredangle BAC + \measuredangle ACB}{2} = \pi = \measuredangle IAC + \measuredangle ACI + \measuredangle CIA \Rightarrow \measuredangle CIA = 2\measuredangle IAC$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

entonces:

$$\measuredangle DIA = \measuredangle IAC = \measuredangle IAD$$

lo cual significa que el triángulo AID es isósceles, luego:

$$ID = AD = \frac{ic}{a+c}$$

y, por tanto:

$$\frac{c\Delta}{a+c} = (AID) = \left(\frac{ID+AD+AI}{2}\right)r_2 = \left(\frac{\frac{2ic}{a+c}+c}{2}\right)r_2 = \left[\frac{c(2i+a+c)}{2(a+c)}\right]r_2 \Rightarrow \frac{1}{r_2} = \frac{2i+a+c}{2\Delta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$$