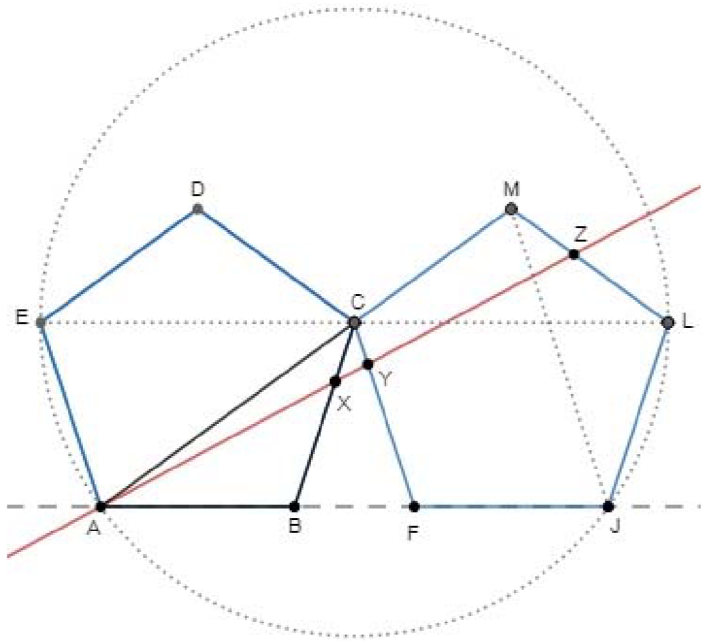
TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de marzo de 2022

Problema 1041. (propuesto por Philippe Fondanaiche) Sean dos pentágonos regulares de lados iguales, $ABCDE$ y $FJLMC$, construídos de forma que los puntos A, B, F y J están situados en linea recta y que el segmento AC tiene longitud unidad (los puntos A, C y M lógicamente están en linea recta). Sea la recta $AXYZ$, con X interior a BC, Y interior a CF y Z interior a ML. Si $BX = u$, $CY = v$ y $MZ = w$ y la construcción de XYZ se hace de manera que $(ABX) = (CYZM)$, demostrar que $u = v + w + vw$.

Solución:



Como $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, en todos los cálculos que se realizarán a continuación, se tendrán en cuenta los restos módulo este polinomio, por lo que, para el triángulo ABC, se verifica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = c = \phi - 1 \\ b = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_A = S_C = \dfrac{1}{2} \\ S_B = \dfrac{3 - 2\phi}{2} \end{array} \right.$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo:

☺ Como el triángulo AJM es isósceles, también lo es el triángulo AFC (ya que son semejantes), por lo que:

$$AF = AC = 1 \Rightarrow F = (\phi - 2 : 1 : 0) = \left(\frac{\phi - 2}{\phi - 1} : \frac{1}{\phi - 1} : 0 \right)$$

😐 Como $CM = \phi - 1$, entonces:

$$M = (1 - \phi : 0 : \phi)$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de marzo de 2022

☹ Como la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio CA es:

$$(2-\phi)xy + xz + (2-\phi)yz - [(1-\phi)y - z](x+y+z) = 0$$

y $CL \parallel AB$, entonces:

$$CL \equiv x + y = 0$$

por lo que, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$L = (-1 : 1 : \phi - 1) = \left(-\frac{1}{\phi-1} : \frac{1}{\phi-1} : 1\right)$$

Una vez visto esto, como:

$$\left\{\begin{array}{l} BX = u \\ CY = v \\ MZ = w \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} XC = \phi - 1 - u \\ YF = \phi - 1 - v \\ ZL = \phi - 1 - w \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X = uC + (\phi - 1 - u)B = (0 : \phi - 1 - u : u) \\ Y = vF + (\phi - 1 - v)C = (-(\phi-1)v : \phi v : \phi - 1 - v) \\ Z = wL + (\phi - 1 - w)M = (\phi - 2 - w : \phi w : 1 - (\phi - 1)w) \end{array}\right.$$

entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(ABX)}{(ABC)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \phi - 1 - u & u \end{vmatrix}}{\phi - 1} = \phi u \\ \dfrac{(CYZ)}{(ABC)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -(\phi-1)v & \phi v & \phi - 1 - v \\ \phi - 2 - w & \phi w & 1 - (\phi-1)w \end{vmatrix}}{(\phi-1)^2} = \phi v(1+w) \\ \dfrac{(CZM)}{(ABC)} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \phi - 2 - w & \phi w & 1 - (\phi-1)w \\ 1 - \phi & 0 & \phi \end{vmatrix}}{\phi - 1} = \phi w \end{array}\right.$$

por lo que:

$$\frac{(ABC) - (CYZM)}{(ABC)} = \frac{(ABX) - [(CYZ) + (CZM)]}{(ABC)} = \phi(u - v(1+w) - w) = \phi(u - v - w - vw)$$

y, por tanto:

$$(ABC) = (CYZM) \Leftrightarrow (ABC) - (CYZM) = 0 \underset{\phi \neq 0}{\Leftrightarrow} u - v - w - vw = 0 \Leftrightarrow u = v + w + vw$$

(teniendo en cuenta que no hemos utilizado para nada que los puntos A, X, Y y Z estén alineados, podemos concluir que esta condición no es necesaria).

Miguel-Ángel Pérez García Ortega