

Solución

de César Beade Franco

1. Escribamos la expresión como

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ que desarrollada da

$$8a^3 - 7a^2b - 7ab^2 + 8b^3 - 7a^2c + 18abc - 7b^2c - 7ac^2 - 7bc^2 + 8c^3 \geq 0$$

Desigualdad homogénea y simétrica en a, b, c , de grado 3. Por ser homogénea (1) podemos imponerle la condición $a=1$ (2).

Y al ser simétrica y de grado ≤ 5 , según el "método pqr, (r-lemma)" (3) los valores extremos de tal expresión se obtienen cuando dos variables son iguales (aquí hacemos $a = b$) o una de ellas es 0 (lo que en este caso está excluido).

Combinando las dos observaciones anteriores, $a=b=1$, la expresión queda $2 + 4c - 14c^2 + 8c^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(-1+c)^2(1+4c) \geq 0$, lo que siempre sucede

2. Nos ocupamos del primer miembro de la igualdad. Resulta que

$$\begin{aligned} \cos\left[\frac{A+B}{2}\right] * \cos\left[\frac{B+C}{2}\right] * \cos\left[\frac{C+A}{2}\right] &= \frac{1}{4} (\cos[A] + \cos[B] + \cos[C] + \cos[A+B+C]) = \\ \frac{1}{4} (\cos[A] + \cos[B] + \cos[C] - 1) &\text{(4), y ahora aplicando el teorema del coseno a cada} \\ \text{ángulo resulta } \frac{1}{4} \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} + \frac{a^2-b^2+c^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - 1 \right) &= \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{8abc} \end{aligned}$$

Pasamos al segundo miembro. Si S es el área del triángulo se sabe que $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

$$\text{y } S = \frac{abc}{4R}. \text{ Además } S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}.$$

$$\text{Así pues } \frac{r}{4R} = \frac{\frac{2S}{a+b+c}}{\frac{abc}{S}} = \frac{2S^2}{abc(a+b+c)} = \frac{\frac{1}{8}(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{abc(a+b+c)} = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{8abc}.$$

Notas

(1) O sencillamente por ser los lados de un triángulo.

(2) U otra, por ejemplo $a+b+c=3$, etc.

(3) Para una explicación de éste método se puede consultar mi solución del problema 892 de esta página.

(4) Esta expresión no se si es conocida, imagino que si. Yo la obtuve directamente con el "Mathematica" con la orden

$$\cos\left[\frac{A+B}{2}\right] * \cos\left[\frac{B+C}{2}\right] * \cos\left[\frac{C+A}{2}\right] // \text{TrigExpand} // \text{FullSimplify}$$