

Problema 1042.

Sea dado un triángulo ABC con inradio r y circunradio R y cuyos lados tienen longitudes a, b y c . Probar que:

$$(1) \quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \geq 8$$

$$(2) \quad \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \frac{r}{4R}$$

Propuesto por Pérez, M. A. (2022): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

$$(1) \quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \geq 8$$

Sabemos que son ciertas las siguientes desigualdades dadas entre la Media Geométrica y la Media Aritmética:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sqrt{b \cdot c} \leq \frac{1}{2}(b+c)$$

$$\sqrt{c \cdot a} \leq \frac{1}{2}(c+a)$$

Por tanto,

$$\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \leq \frac{1}{8}(a+b)(b+c)(c+a) \rightarrow 8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a) \quad (I)$$

Por otra parte,

$$\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{a^2 - (b-c)^2} \leq a$$

$$\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} = \sqrt{b^2 - (c-a)^2} \leq b$$

$$\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)} = \sqrt{c^2 - (a-b)^2} \leq c$$

Multiplicando estas desigualdades,

$$\sqrt{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2} \leq abc \rightarrow (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc \quad (II)$$

Uniendo ambos resultados (I) y (II), deducimos que:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \geq \frac{8abc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \geq 8$$

$$(2) \quad \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \frac{r}{4R}$$

Sean dadas las relaciones siguientes,

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}; \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}; \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}$$

Así entonces podemos expresar la desigualdad (2) del modo:

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \frac{r}{4R} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$$

$$\left(\cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{B}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{C}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}\right) = \frac{r}{4R} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{8} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{r}{4R} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

Ahora bien, es conocida la relación

$$4 \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C$$

Por tanto,

$$\frac{1}{8} \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{r}{4R} \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{r}{2R} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

Sustituyendo

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \sin B = \frac{b}{2R}; \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{r}{2R} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C) \Leftrightarrow \frac{abc}{8R^3} = \frac{r}{2R} \cdot \frac{a+b+c}{2R} \Leftrightarrow \frac{abc}{4R} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

Ahora bien, las dos últimas expresiones son idénticas e iguales al valor del área del $\triangle ABC$:

$$[ABC] = \frac{abc}{4R} = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$