

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 31 de marzo de 2022

Problema 1042. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con inradio r y circunradio R y cuyos lados tienen longitudes a , b y c , probar que:

$$\textcircled{1} \quad \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \geq 8$$

$$\textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \frac{r}{4R}$$

Solución:

① Tenemos que probar que:

$$8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq (a+b)(b+c)(c+a)$$

lo cual vamos a hacer en dos pasos:

❶ Como:

$$\begin{cases} 0 < -a+b+c \\ 0 < a-b+c \\ 0 < a+b-c \end{cases}$$

utilizando la desigualdad existente entre la media aritmética y la media geométrica, resulta que:

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)} \leq \frac{(-a+b+c)+(a-b+c)}{2} = c \\ 0 < \sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)} \leq \frac{(-a+b+c)+(a+b-c)}{2} = b \\ 0 < \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)} \leq \frac{(a-b+c)+(a+b-c)}{2} = c \end{cases}$$

por lo que, multiplicando término a término estas tres desigualdades, obtenemos que:

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc$$

y, por tanto:

$$8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq 8abc$$

❷ Como $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, utilizando la desigualdad existente entre la media aritmética y la media geométrica, resulta que:

$$\begin{cases} \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\ \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2} \\ \sqrt{ca} \leq \frac{c+a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2\sqrt{ab} \leq a+b \\ 0 < 2\sqrt{bc} \leq b+c \\ 0 < 2\sqrt{ca} \leq c+a \end{cases}$$

por lo que, multiplicando término a término estas tres desigualdades, obtenemos que:

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 31 de marzo de 2022

Finalmente:

$$8(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq_1 8abc \leq_2 (a+b)(b+c)(c+a)$$

② Según el Teorema del Coseno:

$$\begin{cases} \cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ca} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

por lo que, como:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{4ab}} \\ \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi-A}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} \\ \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi-B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{4ca}} \end{cases}$$

resulta que:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) &= \sqrt{\frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2}{64a^2b^2c^2}} \\ &= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8abc} \end{aligned}$$

Además, si llamamos Δ al área de este triángulo, como:

$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}} \\ R = \frac{abc}{4\Delta} \\ \Delta = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \end{cases}$$

entonces:

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{C+A}{2}\right) = \frac{4r^2(a+b+c)}{32R\Delta} = \frac{8r\Delta}{32R\Delta} = \frac{r}{4R}$$