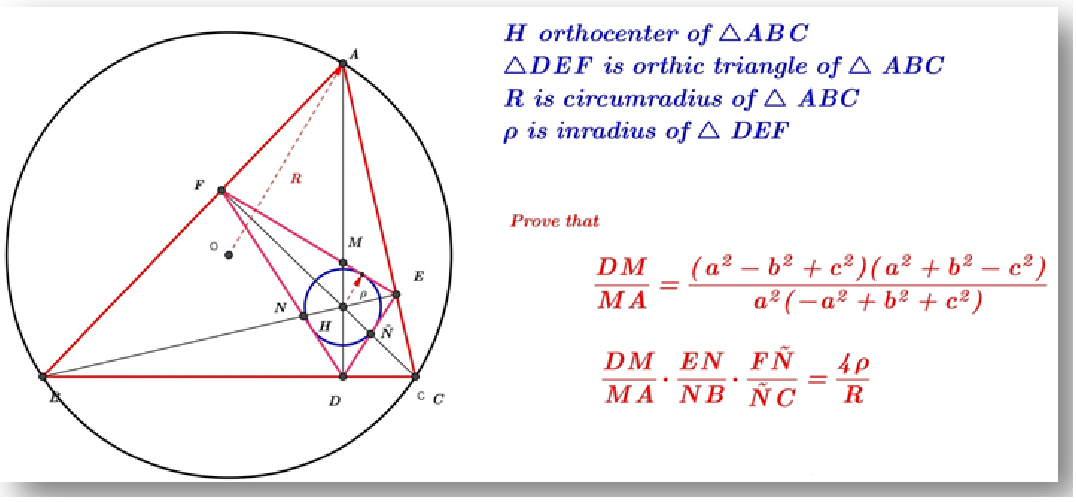
Problema 1043_Laboratorio Virtual de Triángulos con Cabri II



Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

Sabemos que :

$EF = a\,\mathrm{Cos}[A]$, $DF = b\,\mathrm{Cos}[B]$ y $DE = c\,\mathrm{Cos}[C]$

$$DM = \text{bisectriz} = \frac{\sqrt{b\,c\,\mathrm{Cos}[B]\,\mathrm{Cos}[C]\,\left(-a^2\,\mathrm{Cos}[A]^2 + (b\,\mathrm{Cos}[B] + c\,\mathrm{Cos}[C])^2\right)}}{b\,\mathrm{Cos}[B] + c\,\mathrm{Cos}[C]}$$

$$\mathrm{Cos}[A] = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2\,b\,c};\ \mathrm{Cos}[B] = \frac{a^2-b^2+c^2}{2\,a\,c};\ \mathrm{Cos}[C] = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a\,b}$$

$$DM = \frac{\sqrt{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^2-b^2+c^2\right)}{2\,a\,\left(a^2\,\left(b^2+c^2\right) - \left(b^2-c^2\right)^2\right)}$$

$$MA = h_A - DM$$

$$MA = \frac{\sqrt{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}}{2\,a} - \frac{\sqrt{(-a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a+b+c)}\,\left(a^2+b^2-c^2\right)\,\left(a^2-b^2+c^2\right)}{2\,a\,\left(a^2\,\left(b^2+c^2\right) - \left(b^2-c^2\right)^2\right)}$$

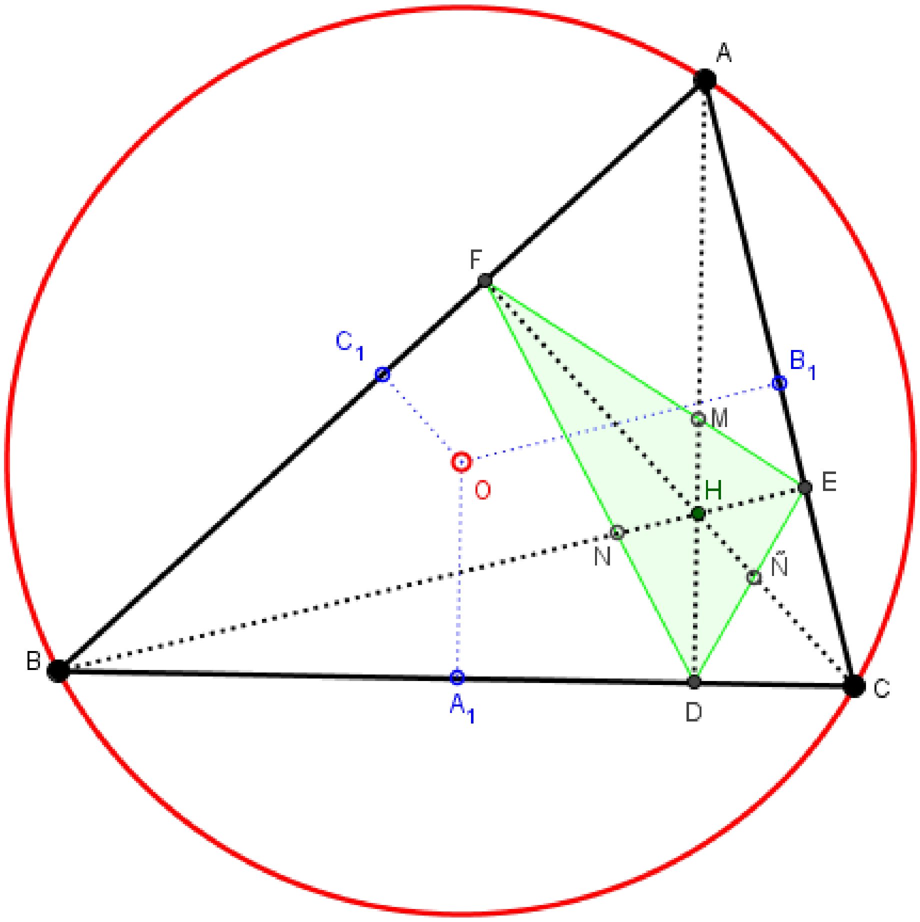
$$MA = \frac{a\,\sqrt{(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}\,\left(-a^2+b^2+c^2\right)}{2\,\left(-\left(b^2-c^2\right)^2 + a^2\,\left(b^2+c^2\right)\right)}$$

$$\frac{DM}{MA} = \frac{-a^4 + \left(b^2-c^2\right)^2}{a^2\,\left(a^2-b^2-c^2\right)}$$

Actuando del mismo modo, obtendríamos las siguientes relaciones similares a esta primera :

$$\frac{DM}{MA}\ \frac{EN}{NB}\ \frac{F\tilde{N}}{\tilde{N}C} = \frac{-a^4 + \left(b^2 - c^2\right)^2}{a^2\ \left(a^2 - b^2 - c^2\right)}\ \frac{-b^4 + \left(c^2 - a^2\right)^2}{b^2\ \left(b^2 - c^2 - a^2\right)}\ \frac{-c^4 + \left(a^2 - b^2\right)^2}{c^2\ \left(c^2 - a^2 - b^2\right)}$$

$$\frac{DM}{MA}\ \frac{EN}{NB}\ \frac{F\tilde{N}}{\tilde{N}C} = \frac{\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\ \left(a^2 - b^2 + c^2\right)\ \left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{a^2\ b^2\ c^2}$$



Consideramos la semejanza entre los triángulos ΔBFD y ΔDEC :

$$\angle BFD = \angle BHD = \angle C;\ \ \angle DEC = \angle DHC = \angle B \rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{DF}{DC} \rightarrow BD \cdot DC = DF \cdot DE$$

Por tanto, $[DEF] = \frac{1}{2}\ DF \cdot DE \cdot \mathrm{Sin}[\pi - 2\ A] = \frac{1}{2}\ BD \cdot DC \cdot \mathrm{Sin}[2\ A]$

$[DEF] = BD \cdot DC \cdot \mathrm{Sin}[A] \cdot \mathrm{Cos}[A]$

Ahora bien, $BD = c \cdot \mathrm{Cos}[B];\ CD = b \cdot \mathrm{Cos}[C]$

$[DEF] = b\ c \cdot \mathrm{Cos}[B]\ \mathrm{Cos}[C]\ \mathrm{Cos}[A]\ \mathrm{Sin}[A]$

$$[DEF] = \frac{a\ b\ c}{2\ R} \cdot \mathrm{Cos}[B]\ \mathrm{Cos}[C]\ \mathrm{Cos}[A]$$

$$[DEF] = \frac{a\ b\ c}{2\ R}\ \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\ a\ c}\ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\ a\ b}\ \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\ b\ c}$$

$$[DEF] = \frac{a\ b\ c}{4\ R}\ \frac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\ \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\ \left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{4\ a^2\ b^2\ c^2}$$

$$[DEF] = \frac{[ABC]}{4}\ \frac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{a^2\, b^2\, c^2}$$

Por tanto, hemos llegado a obtener la siguiente igualdad

$$\frac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{a^2\, b^2\, c^2} = \frac{4[DEF]}{[ABC]}$$

Vamos ahora a deternos otra vez en las semejanzas que hay entre los triángulos $\triangle AFE$, $\triangle BDF$, $\triangle CED$ y $\triangle ABC$:

$$\triangle AFE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AH}{2\,R} = \frac{OA_1}{R} \rightarrow EF = \frac{OA_1}{R}\, a$$

$$\triangle BDF \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{DF}{AC} = \frac{BH}{2\,R} = \frac{OB_1}{R} \rightarrow DF = \frac{OB_1}{R}\, b$$

$$\triangle CED \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{CH}{2\,R} = \frac{OC_1}{R} \rightarrow ED = \frac{OC_1}{R}\, c$$

En definitiva, $EF + DF + ED = \dfrac{\frac{1}{2}\left(OA_1\, a + OB_1\, b + OC_1\, c\right)}{\frac{1}{2}\, R} = \dfrac{[ABC]}{\frac{1}{2}\, R}$

Como quiera que :

$$[DEF] = \frac{1}{2}\,(EF + DF + ED)\,\rho = \frac{[ABC]}{R}\,\rho$$

Por tanto,

$$\frac{\left(a^2 - b^2 + c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}{a^2\, b^2\, c^2} = \frac{4[DEF]}{[ABC]} = 4\,\frac{[ABC]}{R\,[ABC]}\,\rho = \frac{4\,\rho}{R}$$

En definitiva, $\dfrac{DM}{MA}\,\dfrac{EN}{NB}\,\dfrac{FÑ}{ÑC} = \dfrac{4\,\rho}{R}$