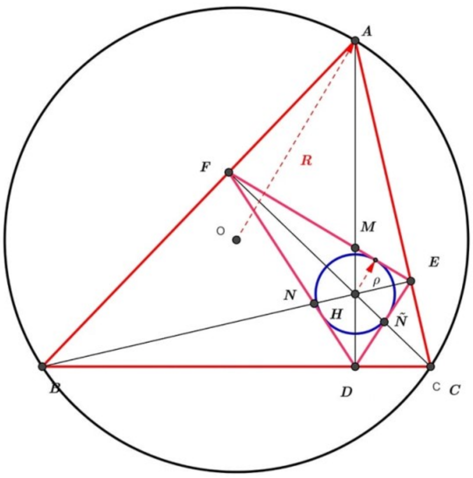
Quincena del 16 al 31 de de marzo de 2022.

Propuesto por Juan José Isach Mayo, España.

***Problema* 1043.-**



H *orthocenter of* $\triangle ABC$
$\triangle DEF$ *is orthic triangle of* $\triangle\ ABC$
R *is circumradius of* $\triangle\ ABC$
ρ *is inradius of* $\triangle\ DEF$

Prove that

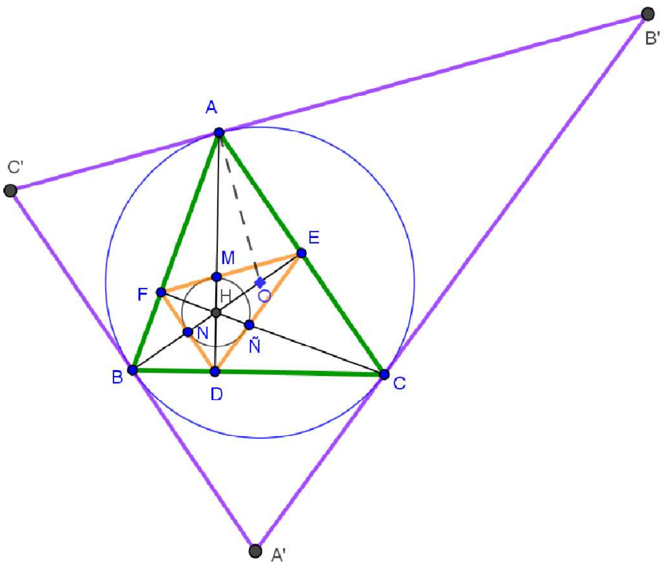
$$\frac{DM}{MA}=\frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2(-a^2+b^2+c^2)}$$

$$\frac{DM}{MA}\cdot\frac{EN}{NB}\cdot\frac{F\tilde{N}}{\tilde{N}C}=\frac{4\rho}{R}$$

Isach, J.J. (2022): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Para la primera parte del problema usando el teorema del coseno, transformamos la expresión del segundo miembro; se tiene así:



$$\frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2(-a^2+b^2+c^2)}=$$

$$=\frac{2ca\cos B\cdot\ 2ab\cos C}{a^2\cdot 2bc\cos A}$$

$$=\frac{2\cos B\cos C}{\cos A}$$

Habremos de demostrar que

$$\frac{DM}{MA}=\frac{2\cos B\cos C}{\cos A}$$

En el triángulo AME, cuyos ángulos son $90-C$, $90-(B-C)$ y B respectivamente, según el teorema de los senos tenemos $\frac{MA}{\operatorname{sen} B}=\frac{c\cdot\cos A}{\cos(B-C)}$, de donde $MA=\frac{AD\cdot\cos A}{\cos(B-C)}$.

Por otra parte se tiene $DM=AD-MA=AD\left[1-\frac{\cos A}{\cos(B-C)}\right]$, de ahí [(1)]

$$\frac{DM}{MA}=\frac{\cos(B-C)-\cos A}{\cos A}=\frac{2\cos B\cos C}{\cos A}$$

Para probar la segunda parte, aplicamos la primera a cada fracción y tenemos

(1) $\cos(B-C)-\cos A=-2\operatorname{sen}\left(\frac{B-C+A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B-C-A}{2}\right)=-2\operatorname{sen}(90-C)\operatorname{sen}(B-90)=2\cos B\cos C$

$$\frac{DM}{MA}=\frac{2\cos B\cos C}{\cos A},\ \frac{EN}{NB}=\frac{2\cos C\cos A}{\cos B},\ \frac{F\tilde{N}}{\tilde{N}C}=\frac{2\cos A\cos B}{\cos C}$$

Y para el producto

$$\frac{DM}{DA}\cdot\frac{EN}{NB}\cdot\frac{F\tilde{N}}{\tilde{N}C}=8\cdot\cos A\cos B\cos C$$

Lo que tenemos que demostrar es pues, $\frac{4\rho}{R}=8\cdot\cos A\cos B\cos C$.

El triángulo tangencial de ABC está formado por las tangentes en los vértices a la circunferencia circunscrita. Claramente es el triángulo de contacto interior para éste, de ahí podemos obtener sus lados y ángulos. El ángulo en A, es $\sphericalangle A=90-\frac{A'}{2}$, de donde $A'=180-2A$, resultando así **semejante al triángulo órtico.**

En el vértice A' del triángulo tangencial se forma un triángulo isósceles, cuyos lados iguales son $s'-a'$ (s', a' semiperímetro y lado del triángulo tangencial). Así pues el lado opuesto a este vértice (el lado $BC=a$ del triángulo inicial) mide $a=2(s'-a')\cdot\cos A$, de donde

$$s'-a'=\frac{a}{2\cdot\cos A}=\frac{2R\text{sen }A}{2\cdot\cos}=R\cdot\tan A.$$

Entonces $c'=(s'-a')+(s'-b')=R\cdot(\tan A+\tan B)$.

El homólogo del triángulo órtico mide $R\cdot\text{sen}2C=\ c\cdot\cos C$ (la circunferencia circunscrita es la de los nueve puntos de radio $R/2$). Si llamamos ρ al radio de la circunferencia inscrita en el triángulo órtico, tendremos, en virtud de la semejanza

$$\frac{\rho}{R}=\frac{c\cdot\cos C}{R\cdot(\tan A+\tan B)}=\frac{2\cos A\cos B\cos C\text{ sen }C}{\text{sen}(A+B)}=2\cos A\cos B\cos C$$

con lo que se concluye el problema.■