

Enunciado

Sea BC una cuerda del círculo (Γ) de centro O.

Desde un punto P sobre la recta [BC], trazamos el círculo circunscrito al triángulo BOP que corta (Γ) en un segundo punto A.

Determine el lugar geométrico del centro ω del círculo (γ) circunscrito al triángulo APC.

Fondanaiche, P. (2022)

Solución

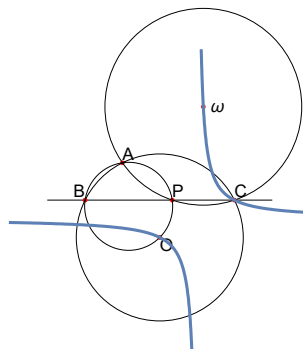
Tomemos como extremos del segmento B(-a,0) y C(a,0), el centro del círculo Γ como O(0,-b) y P(t,0).

El círculo Γ tiene como ecuación $x^2 + y^2 + 2by - a^2 = 0$ y el circunscrito a BOP, $x^2 + y^2 + a\left(x - \frac{t(b+y)}{b}\right) - tx + by = 0$.

El punto de corte de estos círculos es $A\left(\frac{2b^2t+a(-b^2+t^2)}{b^2+t^2}, \frac{2b(a-t)t}{b^2+t^2}\right)$.

El centro del círculo circunscrito al triángulo APC es $\omega = \left(\frac{a+t}{2}, \frac{b(a-t)}{2t}\right)$ que puede considerarse como la ecuación paramétrica del lugar buscado.

Eliminando el parámetro t, obtenemos su ecuación implícita $x(b+2y) - a(b+y) = 0$, que resulta ser una cónica.



Para analizar el tipo de cónica calculamos su invariante afín que vale -1, es decir, tenemos una hipérbola, equilátera además como observamos al calcular sus ejes $-\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + x + y = 0$, $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - x + y = 0$ o también sus asíntotas $y = \frac{-b}{2}$, $x = \frac{a}{2}$.

El centro es $D\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, punto medio de OC y los focos $F\left(\frac{1}{2}(a - \sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{b}), -\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2}\right)$ y $F'\left(\frac{1}{2}(a + \sqrt{2}\sqrt{a}\sqrt{b}), \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2}\right)$

