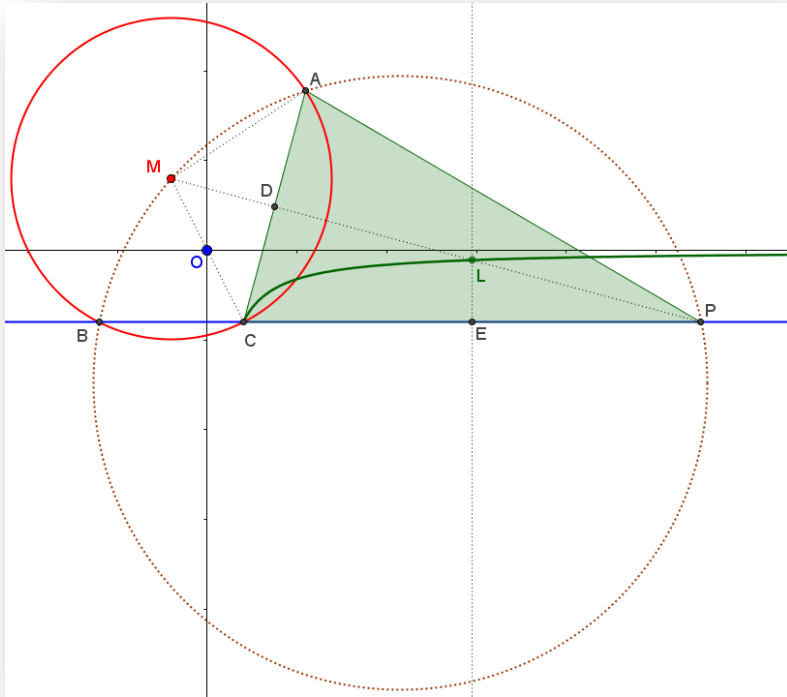


Problema 1044.

Sea BC una cuerda del círculo (Γ) de centro M. Desde un punto P sobre la derecha [BC], trazamos el círculo circunscrito al triángulo BMP que corta (Γ) en un segundo punto A, Determine el lugar geométrico del centro ω del círculo (γ) circunscrito al triángulo APC.

Fondanaiche, P. (2022): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).



Dada la circunferencia de centro el punto M y de radio $MB=MC$, elegimos como sistema de referencia S el formado por el punto O, punto medio del segmento MC y como EJE OX: la recta paralela a la cuerda BC y como EJE OY, la recta que es perpendicular a la cuerda BC y que pasa por el punto O.

De esta forma, los siguientes elementos tendrán como coordenadas y ecuaciones las siguientes:

$$M(a, b), C(-a, -b), P(t, -b), -a < t \in R; \text{ Recta } BC \equiv y = -b$$

Al ser congruentes $\triangle MAP$ y $\triangle MCP$, observamos que el punto A verifica $AP = CP$, Por tanto, $MP \perp AC$. De esta forma, MP es la mediatriz del segmento AC. Para hallar el punto L, centro de la circunferencia que circunscribe al $\triangle ACP$, bastará con hallar el punto de intersección de las mediatrices de los lados AC y CP, respectivamente:

$$m_1: \text{Mediatriz de AC: Recta MP} \rightarrow \begin{cases} x = a + (t-a)\alpha \\ y = b - 2b\alpha \end{cases}; \alpha \in R$$

$$m_2: \text{Mediatriz de CP: } x = \frac{t-a}{2}$$

$$\text{Por tanto, } L = m_1 \cap m_2 \rightarrow \alpha = \frac{t-3a}{2(t-a)}; L\left(\frac{t-a}{2}, \frac{2ab}{t-a}\right) \rightarrow \begin{cases} x = \frac{t-a}{2} \\ y = \frac{2ab}{t-a} \end{cases} \rightarrow xy = ab;$$

En definitiva,

$$y = \frac{ab}{x} \text{ (Hipérbola), } -a < x.$$