

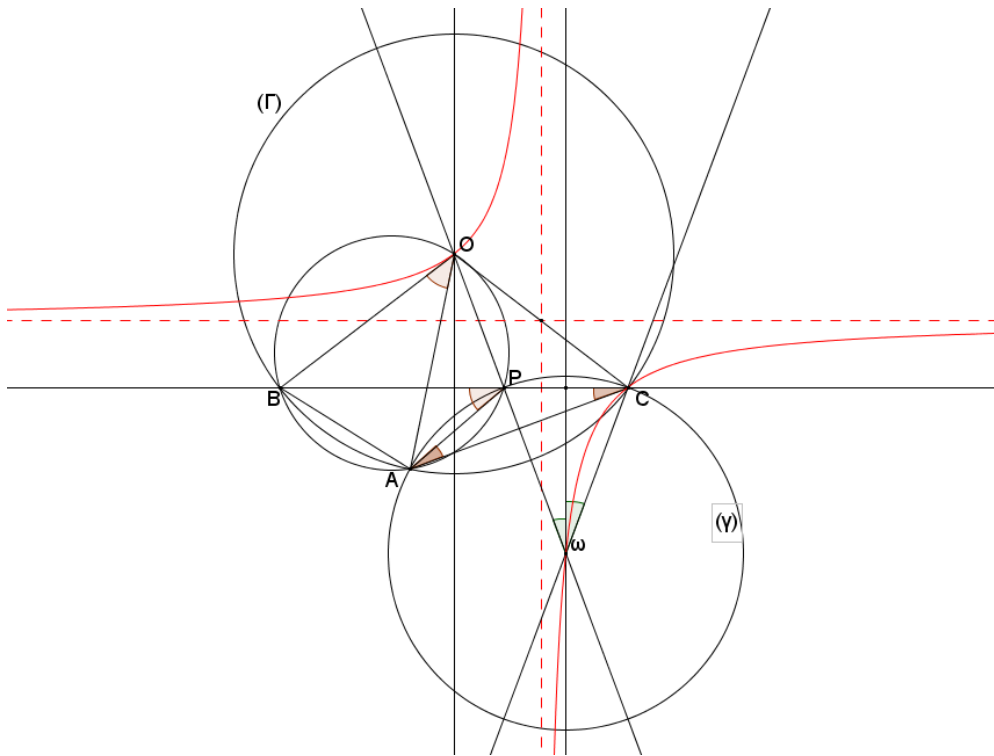
Problema n°1044

Sea BC una cuerda del círculo (Γ) de centro O.

Desde un punto P sobre la derecha [BC], trazamos el círculo circunscrito al triángulo BOP que corta (Γ) en un segundo punto A .

Determine el lugar geometrico del centro ω del círculo (γ) circunscrito al triángulo APC.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Lemme : $PA = PC$

Dans le cercle (Γ) on a la relation d'angles $\angle AOB = 2 \angle ACB$ et dans le cercle circonscrit au triangle BOP on a la deuxième relation d'angles $\angle AOB = 2 \angle APB$. Or $\angle APB = \angle BCA + \angle CAP$

Il en résulte que : $\angle BCA = \angle ACP = \angle CAP$.

Le triangle PAC est isocèle de sommet P.

Comme $OA = OC$, $PA = PC$, $\omega A = \omega C$, le point ω centre du cercle (γ) circonscrit au triangle PAC est sur la droite [OP].

Quand P décrit la droite [BC], le point ω décrit la courbe du seau d'eau⁽¹⁾ qui est l'hyperbole équilatère dont l'une des deux branches passe par O et l'autre par C et dont les asymptotes sont deux droites perpendiculaires qui se croisent au milieu de OC l'une d'elles étant parallèle à la droite [BC]

⁽¹⁾Voir annexe, courbe décrite par R. Ferréol sur son site mathcurve.com

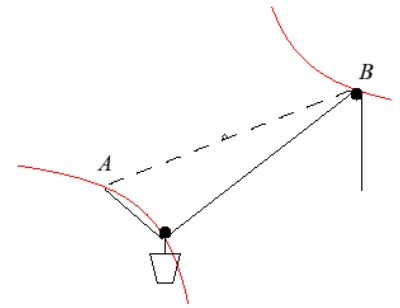
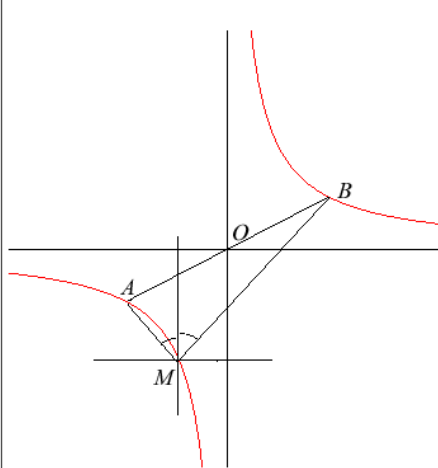
Annexe

5) a) Définition angulaire (cas particulier de [stelloïde](#)) :

Étant donnés deux points distincts A et B , le lieu des points M tels que les bissectrices des droites (MA) et (MB) aient des directions constantes est l'hyperbole équilatère passant par A et B dont les asymptotes passent par le milieu de $[AB]$ et sont parallèles à ces directions constantes.

Interprétation mécanique * : une corde est attachée à une extrémité à un point fixe A , passe par une poulie B et est maintenue à la main à l'autre extrémité. Un seau est suspendu à la corde par une poulie entre A et B . Le seau décrit une portion d'hyperbole équilatère.

* Voir [Roguet p 161 \(1842\)](#)



La courbe du seau d'eau :
comparer avec la [courbe du danseur de corde](#).

b) Définition angulaire équivalente à la précédente.

Étant donné trois points distincts A, B, C le lieu des points M vérifiant $(AC, AM) = (BM, BC)$ (1) (angles orientés de droites) est l'unique hyperbole équilatère de diamètre $[AB]$ (i.e. centrée au milieu de (A, B)), éventuellement dégénérée, passant par C . Les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de (AC) et (BC) .

(1) s'écrivant aussi : $(AB, AM) - (BM, AB) = (AB, AC) - (BC, AB)$, on peut donner une troisième définition angulaire :

étant donné deux points distincts A, B , et un réel θ le lieu des points M vérifiant $\text{mesure}(AB, AM) - \text{mesure}(BM, AB) = \theta \bmod \pi$ est une hyperbole équilatère de diamètre $[AB]$.

Par exemple, $\text{mesure}(AB, AM) - \text{mesure}(BM, AB) = \pi/2 \bmod \pi$ est l'hyperbole équilatère de sommets A et B .

