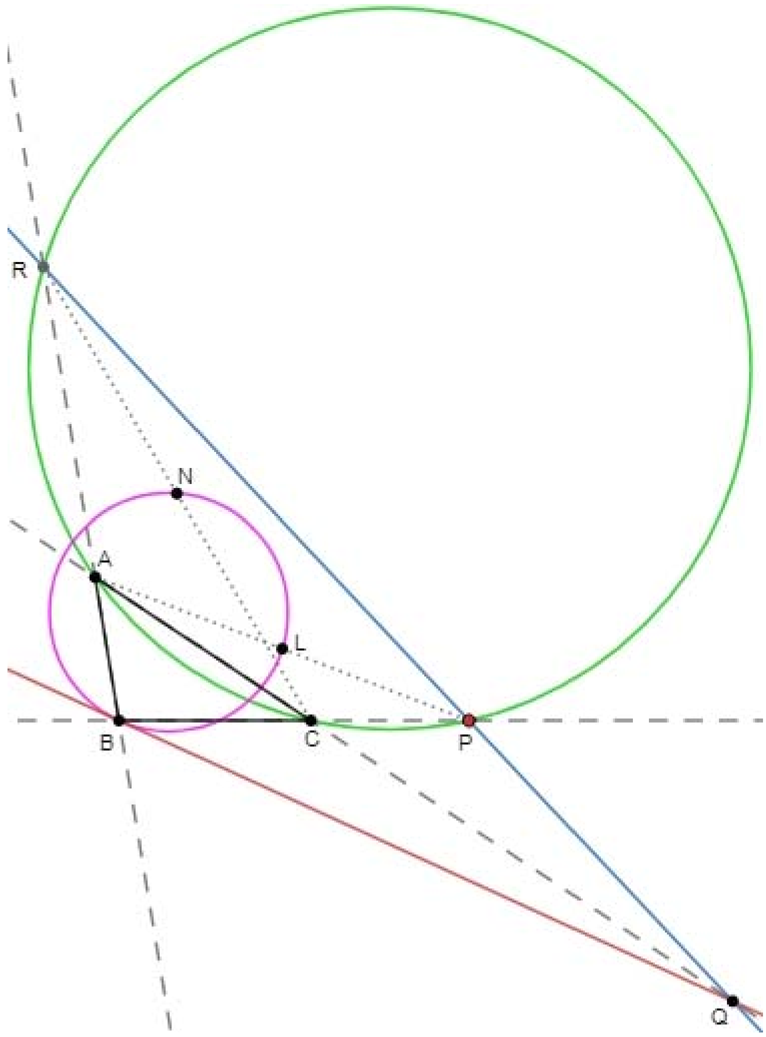
# TRIÁNGULOS CABRI
## 16 al 31 de marzo de 2022

**<u>Problema 1045.</u>** (propuesto por Jean Louis Aymé) Dados un triángulo $ABC$ y un punto $P$ situado sobre la recta $BC$, se consideran el segundo punto $R$ de intersección entre la recta $AB$ y la circunferencia circunscrita al triángulo $APC$ y el punto $Q$ de intersección entre las rectas $PR$ y $CA$. Si $L$ y $N$ son los puntos medios de los segmentos $AP$ y $CR$, respectivamente, probar que la circunferencia circunscrita al triángulo $BLN$ es tangente en el punto $B$ a la recta $BQ$.

*<u>Solución:</u>*




Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo $ABC$, si $P=(0:1-t:t)\ (t\in\mathbb{R})$, como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $APC$ es:

$$c^2xy+b^2xz+a^2yz-a^2ty(x+y+z)=0$$

entonces:

$$R=AB\cap\odot APC=(a^2t:c^2-a^2t:0)\Rightarrow PR\equiv(a^2t-c^2)x+a^2ty-a^2(1-t)z=0$$

**Miguel-Ángel Pérez García Ortega**

por lo que:

$$Q = PR \cap CA = (a^2(1-t) : 0 : a^2 t - c^2)$$

siendo:

$$\begin{cases} L = (1 : 1-t : t) \\ N = (a^2 t : c^2 - a^2 t : c^2) \end{cases}$$

Además, como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo $BLN$ es:

$$2(a^2t-c^2)(c^2xy+b^2xz+a^2yz)-[(-c^4-b^2c^2t+c^4t-a^4t^2+a^2b^2t^2+2a^2c^2t^2-a^4t^3)x-a^2(c^2-a^2t+b^2t-2a^2t^2-b^2t^2+c^2t^2+a^2t^3)z](x+y+z)=0$$

entonces, la ecuación de la recta tangente a ella en el punto $B$ es:

$$0=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2(-c^4-b^2c^2t+c^4t-a^4t^2+a^2b^2t^2+2a^2c^2t^2-a^4t^3) & (c^2-a^2t)(c^2+a^2t-b^2t+c^2t+a^2t^2) & -a^2c^2+2b^2c^2-c^4+a^4t-a^2b^2t-b^2c^2t+c^4t+a^4t^2+a^2c^2t^2-2a^4t^3 \\ (c^2-a^2t)(c^2+a^2t-b^2t+c^2t+a^2t^2) & 0 & a^2(1-t)(c^2+a^2t-b^2t+c^2t+a^2t^2) \\ -a^2c^2+2b^2c^2-c^4+a^4t-a^2b^2t-b^2c^2t+c^4t+a^4t^2+a^2c^2t^2-2a^4t^3 & a^2(1-t)(c^2+a^2t-b^2t+c^2t+a^2t^2) & -2a^2(c^2-a^2t+b^2t-2a^2t^2-b^2t^2+c^2t^2+a^2t^3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$(c^2-a^2t)x+a^2(1-t)z=0$$

pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que esta recta pasa por el punto $Q$, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación.