Pr. Cabri 1046

Enunciado

Dado un triángulo ABC, se consideran dos puntos P y Q situados en las rectas BC y CA, respectivamente, tales que: BP /BC = CQ/ CA Las rectas AP y BQ cortan a la circunelipse de Steiner del triángulo ABC en segundos puntos U y V, respectivamente. Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas UV cuando el punto P recorre la recta BC.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Dado que las tranformaciones afines conservan las elipses de Steiner y las razones entre segmentos resolveremos el probema para un triángulo particular, el equilátero de vértices A(-1,0), B(1,0) y C(0,$\sqrt{3}$).

Los puntos P y Q sobre BC y CA que cumplen las condiciones del problema pueden ser P(1-p, $p\sqrt{3}$) y Q($-p$, $(1-p)\sqrt{3}$).

Las rectas AP y BQ tienen como ecuaciones respectivas $-\sqrt{3}\,p-\sqrt{3}\,p\,x+2\,y-p\,y=0$ y $-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,p-2\sqrt{3}\,p^2+\sqrt{3}\,x-2\sqrt{3}\,p\,x+y=0$ y la circunelipse de Steiner (que en este caso es el circuncírculo) $x^2+y^2-\frac{2\,y}{\sqrt{3}}-1=0$

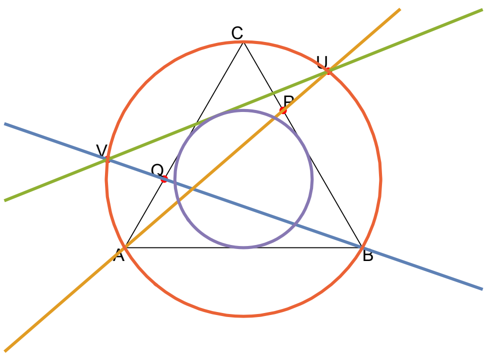
La recta AP corta a la elipse en U($\frac{1-p^2}{1+(-1+p)\,p}$, $\frac{\sqrt{3}\,p}{1+(-1+p)\,p}$) y la BQ en V($\frac{(-2+p)\,p}{1+(-1+p)\,p}$, $-\frac{\sqrt{3}\,(-1+p)}{1+(-1+p)\,p}$).

La recta UV que determinan es f(p)=$-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,(1-2\,p)\,x+y-2\,(-1+p)\,p\,y=0$.

Para calcular su envolvente resolvemos el sistema {f(p)=0, f'(p)=0} que nos proporciona la ecuación paramétrica del lugar ($1-2\,p$, $-2\left(-\sqrt{3}\,p+\sqrt{3}\,p^2\right)$).

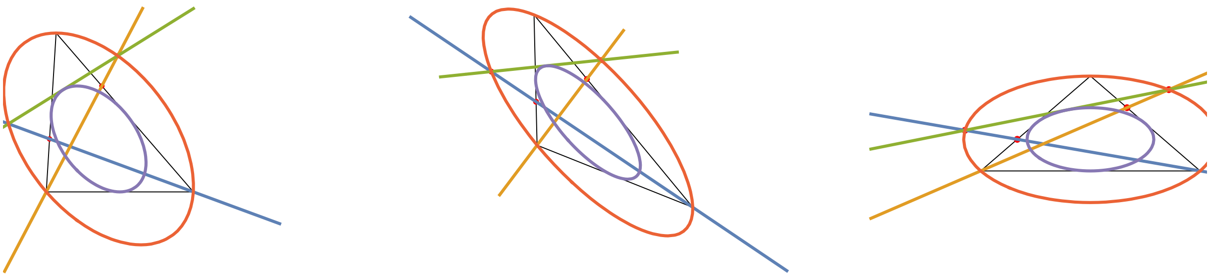
Eliminando el parámetro p obtenemos su ecuación implicita, $x^2+y^2-\frac{2\,y}{\sqrt{3}}=0$, incírculo del triángulo y en general inelipse de Steiner

Out[451]=



En el próximo dibujo vemos casos generales

Out[478]=



Notas

Nos podríamos preguntar por la envolvente de la recta PQ. Resulta ser una parábola que pasa por A y B con eje OY (mediana desde C en general) y foco el baricentro.

Out[472]=