TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de abril de 2022

<u>Problema 1046.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se consideran dos puntos P y Q situados en las rectas BC y CA, respectivamente, tales que:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA}$$

Las rectas AP y BQ cortan a la circunelipse de Steiner del triángulo ABC en segundos puntos U y V, respectivamente. Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas UV cuando el punto P recorre la recta BC.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (0 : 1-t : t)$ $(t \in \mathbb{R})$, la recta paralela a AB pasando por P:

$$tx + ty - (1-t)z = 0$$

corta a la recta CA, cuya ecuación es $y = 0$, en el punto simétrico $Q' = (1-t : 0 : t)$ del punto del punto Q con respecto al punto medio $M = (1 : 0 : 1)$ del segmento CA, por lo que $Q = (t : 0 : 1-t)$ y, por tanto:

$$\begin{cases} AP \equiv 0 = ty - (1-t)z \\ BQ \equiv 0 = (1-t)x - tz \end{cases}$$

Además, como la ecuación de la circunelipse de Steiner del triángulo ABC es:

$$xy + xz + yz = 0$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} U = (-(1-t)t : 1-t : t) \\ V = (t : -(1-t)t : 1-t) \end{cases}$$

por lo que:

$$UV \equiv (1-t)x + ty - (1-t)tz = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t:

$$\begin{cases} 0 = (1-t)x + ty - (1-t)tz \\ 0 = -x + y - (1-2t)z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

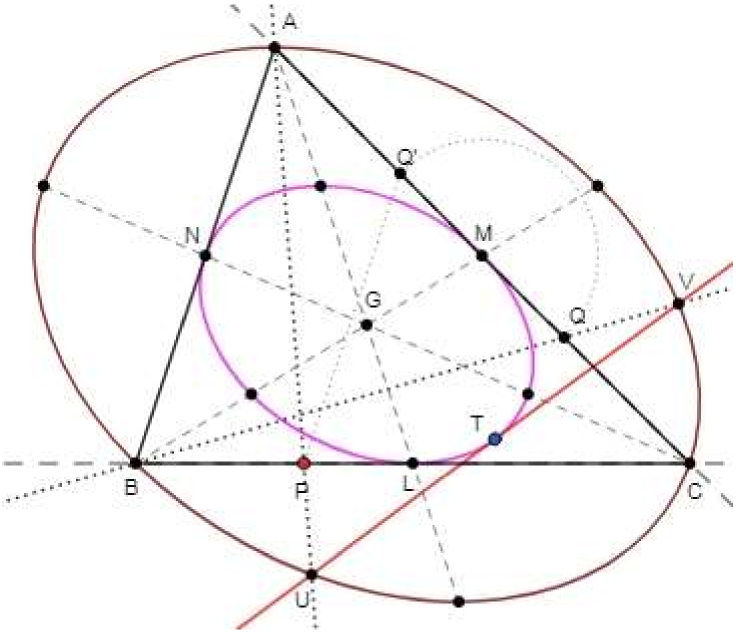
por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

que corresponde a inelipse de Steiner del triángulo ABC.

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de abril de 2022



Miguel-Ángel Pérez García Ortega