TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de abril de 2022

Problema 1047. (propuesto por Thanasis Gakopoulos y Juan-José Isach Mayo) Sean O, H y K, respectivamente, el circuncentro, el ortocentro y el punto simediano de un triángulo ABC de circunferencia circunscrita ω y sean M y N, respectivamente, los puntos medios de los lados AB y AC. Además, sean $OH \cap AK = T$ y $AH \cap OK = S$. Supongamos que las rectas OH y AK son perpendiculares. Demostrar que, en este caso, se cumplen las cuatro afirmaciones siguientes:

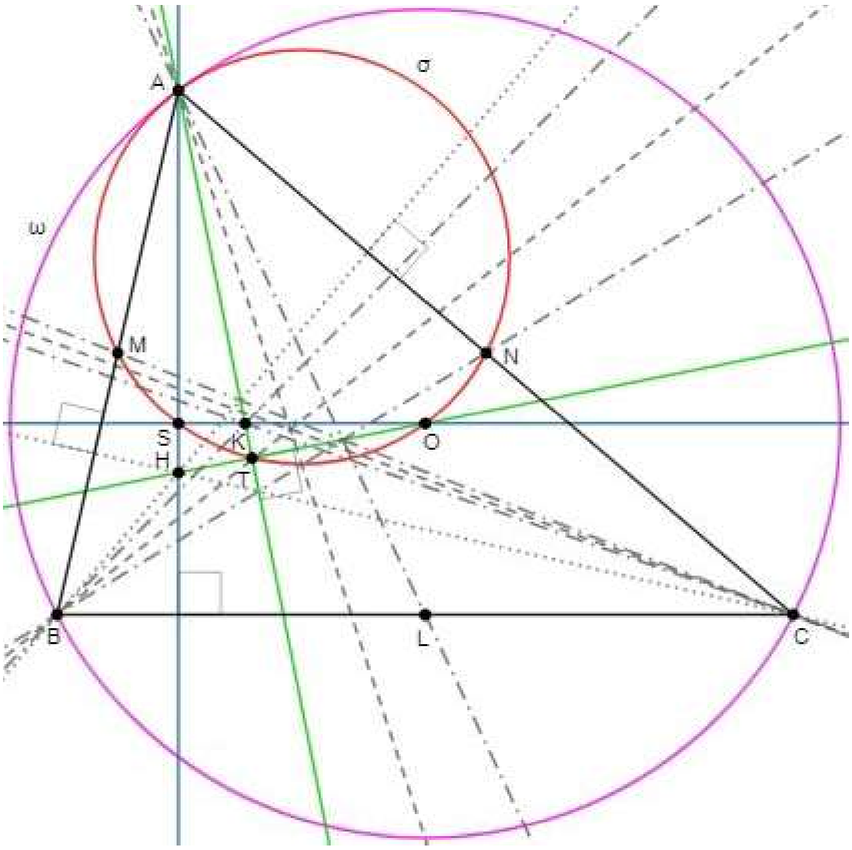
① $a^2(b^2+c^2) = b^4 + c^4$

② $OK \parallel BC$

③ Los puntos A, M, N, O, T y S son concíclicos.

④ La circunferencia σ que pasa por los puntos A, M, N, O, T y S y la circunferencia ω son tangentes en el punto A.

Solución:



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} O = (a^2 S_A : b^2 S_b : c^2 S_C) \\ H = (S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B) \\ K = (a^2 : b^2 : c^2) \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

entonces:

$$\begin{cases} OH \equiv 0 = (b^2-c^2)S_A x + (c^2-a^2)S_B y + (a^2-b^2)S_C z \\ AK \equiv 0 = c^2 y - b^2 z \\ AH \equiv 0 = S_B y - S_C z \\ OK \equiv 0 = b^2c^2(b^2-c^2)x + c^2a^2(c^2-a^2)y + a^2b^2(a^2-b^2)z \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} T = OH \cap AK = (b^2c^2 - a^2S_A : b^2S_A : c^2S_A) \\ S = AH \cap OK = (a^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2) : -2b^2c^2S_C : -2b^2c^2S_B) \end{cases}$$

① Como $OH \perp AK$ y:

$$\begin{cases} OH_\infty = ((a^2-b^2)S_C - (c^2-a^2)S_B : (b^2-c^2)S_A - (a^2-b^2)S_C : (c^2-a^2)S_B - (b^2-c^2)S_A) \\ AK_\infty = (b^2+c^2 : -b^2 : -c^2) \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= OH_\infty \cdot AK_\infty \\ &= S_A[(a^2-b^2)S_C - (c^2-a^2)S_B](b^2+c^2) - S_B[(b^2-c^2)S_A - (a^2-b^2)S_C]b^2 - S_C[(c^2-a^2)S_B - (b^2-c^2)S_A]c^2 \\ &= 2S^2[a^2(b^2+c^2) - (b^4+c^4)] \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$a^2(b^2+c^2) = b^4+c^4$$

② Como:

$$\begin{aligned} OK_\infty &= \left(a^2\left(\underbrace{b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)}_{=0}\right) : b^2(a^4+c^4-b^2(a^2+c^2)) : c^2(a^4+b^4-c^2(a^2+b^2))\right) \\ &= (0 : 1 : -1) \\ &= BC_\infty \end{aligned}$$

entonces, $OK \parallel BC$.

③ Como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo AMN es:

$$2(c^2xy + b^2xz + a^2yz) - (c^2y + b^2z)(x+y+z) = 0$$

puede comprobarse, por simple sustitución, que el punto O está situado sobre ella (independientemente de que las rectas OH y AK sean o no perpendiculares), ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Además, sustituyendo en esta ecuación las coordenadas de los puntos T y S obtenemos que:

$$\begin{cases} T \rightarrow \quad 4b^2c^2S_A[a^2(b^2+c^2) - (b^4+c^4)] = 0 \\ S \rightarrow -4a^2b^2c^2S^2[a^2(b^2+c^2) - (b^4+c^4)] = 0 \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

y, por tanto, estos dos puntos también están situados sobre dicha circunferencia.

④ Como:

$$\begin{cases} \sigma \equiv 0 = 2(c^2xy + b^2xz + a^2yz) - (c^2y + b^2z)(x + y + z) \\ \omega \equiv 0 = c^2xy + b^2xz + a^2yz \end{cases}$$

y, de este sistema de ecuaciones, se deduce que $y = 0 = z$, entonces, estas dos circunferencias se cortan únicamente en el punto $A = (1 : 0 : 0)$, por lo que son tangentes en este punto (independientemente de que las rectas OH y AK sean o no perpendiculares).