

Quincena del 1 al 15 de de abril de 2022.

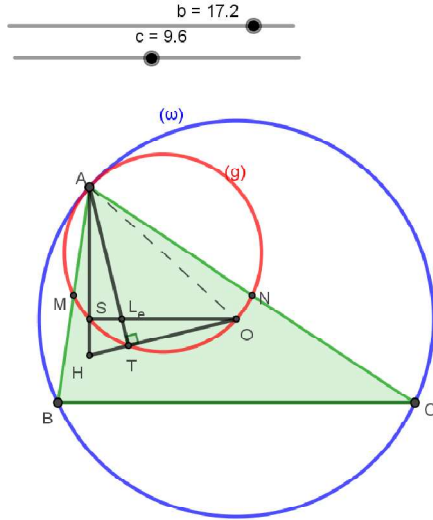
Propuesto por Thanasis Gakopoulos, Grecia y Juan José Isach Mayo, España.

Problema 1047.- Dado un triángulo ABC . Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Sean O, H y L_e circuncentro, ortocentro y punto simediano; (ω) la circunferencia circunscrita de ABC . $OH \cap AL_e = T$; $AH \cap OL_e = S$.

Si $OH \perp AL_e$ entonces probar que:

1) $a^2 = \frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2}$; **2)** $OL_e \parallel BC$; **3)** A, M, N, O, T y S son concíclicos (circunferencia (g)); **4)** $(\omega) \cap (g) = A$.

Gakopoulos, T. e Isach, J.J. (2022) Comunicación personal.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a tomar coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC .

1) A partir de $G = (1:1:1)$; $H = (S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$; $L_e = (a^2 : b^2 : c^2)$ y $\sigma = S_B S_C + S_C S_A + S_A S_B \neq 0$ se obtiene $\overrightarrow{GH} = 3H - \sigma G = (3S_B S_C - \sigma : 3S_C S_A - \sigma : 3S_A S_B - \sigma)$ y

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL_e} &= (a^2 : b^2 : c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 : 0 : 0) \\ &= (-b^2 - c^2 : b^2 : c^2)\end{aligned}$$

La perpendicularidad de estos vectores significa que

$$\begin{aligned}-(b^2 + c^2)(3S_B S_C - \sigma)S_A + b^2(3S_C S_A - \sigma)S_B \\ + c^2(3S_A S_B - \sigma)S_C = 0\end{aligned}$$

Esto es equivalente a

$$(b^2 + c^2)S_A = b^2 S_B + c^2 S_C \quad (*)$$

Poniendo $S_B = c^2 - S_A$ y $S_C = b^2 - S_A$ y $2 \cdot S_A = (b^2 + c^2) - a^2$ resulta:

$$(b^2 + c^2)S_A = b^2(c^2 - S_A) + c^2(b^2 - S_A) \Leftrightarrow 2(b^2 + c^2)S_A = 2b^2 c^2$$

$(b^2 + c^2) \cdot 2S_A = (b^2 + c^2)^2 - a^2(b^2 + c^2) = 2b^2 c^2$, y de aquí se despeja

$$a^2 = \frac{(b^2 + c^2)^2 - 2b^2 c^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^4 + c^4}{b^2 + c^2}$$

2) Habremos demostrado la propiedad pedida si $A_\infty = (0,1,-1)$ (punto del infinito de la recta BC) y los puntos $O = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)$ y L_e están alineados, para ello ha de suceder que sea cero el determinante formado por sus coordenadas.

$$0 = \begin{vmatrix} a^2 S_A & b^2 S_B & c^2 S_C \\ 0 & 1 & -1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 S_A & b^2 S_B & b^2 S_B + c^2 S_C \\ 0 & 1 & 0 \\ a^2 & b^2 & b^2 + c^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \frac{a^2 S_A}{a^2} = \frac{b^2 S_B + c^2 S_C}{b^2 + c^2}$$

Y esto es lo que hemos expresado en (*).

Que OL_e sea paralelo a BC equivale a decir que es perpendicular a AH ; como OH y AL_e son perpendiculares significa que L_e es el ortocentro del triángulo AOH .

3) Los triángulos rectángulos OSA y OTA comparten la hipotenusa OA . Por tanto están sobre la circunferencia de diámetro igual a la hipotenusa. La circunferencia (g) tiene radio igual a la mitad del radio de la circunscrita, como la circunferencia de Euler y pasa por A, T, S y O .

Si M y N son los puntos medios de AB y AC respectivamente, los triángulos OMA y ONA también son rectángulos con OA como hipotenusa, por tanto M y N , están en la circunferencia (g) .

4) Es evidente, pues OA es un diámetro. ■