

Pr. Cabri I048

Enunciado

Dado un triángulo ABC con $AB \neq AC$, se consideran dos puntos P y Q situados en las rectas AB y AC, respectivamente, tales que:

$$AP/AB = AQ/AC$$

Las rectas CP y BQ cortan a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en segundos puntos U y V,

respectivamente. Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas UV cuando el punto P recorre la recta AB.

Propuesto por Pérez, M. A.

Solución

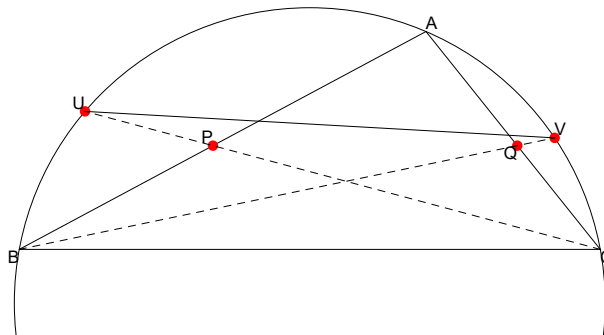
de César Beade Franco

Consideremos el triángulo $A(a,b)$, $B(-1,0)$ y $C(1,0)$ y los puntos $P(p, \frac{b(1+p)}{a+1})$ sobre AB y $Q(\frac{2a-p+a p}{a+1}, \frac{b(1+p)}{a+1})$ sobre AC cumpliendo las condiciones del problema.

El circuncírculo de ABC tiene como ecuación implícita $x^2 + y^2 + \frac{y}{b} - \frac{a^2 y}{b} - b y - 1 = 0$.

Intersecándolo con las rectas CP y BQ obtenemos los puntos U y V respectivamente que determinan la recta $f(p)=0$ (1).

Out[379]=

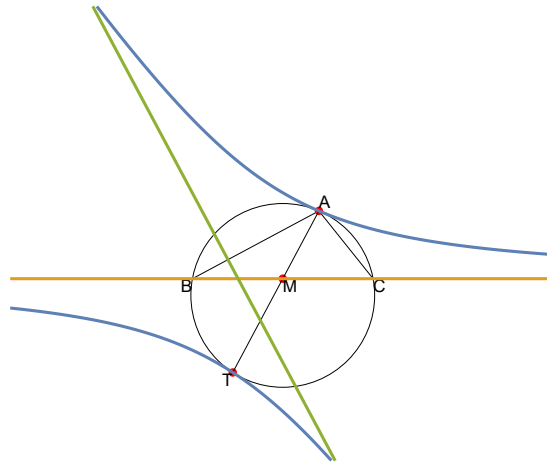


Resolviendo el sistema $\{f(p)=0, f'(p)=0\}$ obtenemos la ecuación paramétrica del lugar,

$$\left(\frac{-1+b^2 + \frac{1+a}{1+p} + \frac{(1+a)(-a+b)(a+b)}{-1-2a+p}}{a}, \frac{b(1+p)}{1+2a-p} \right).$$

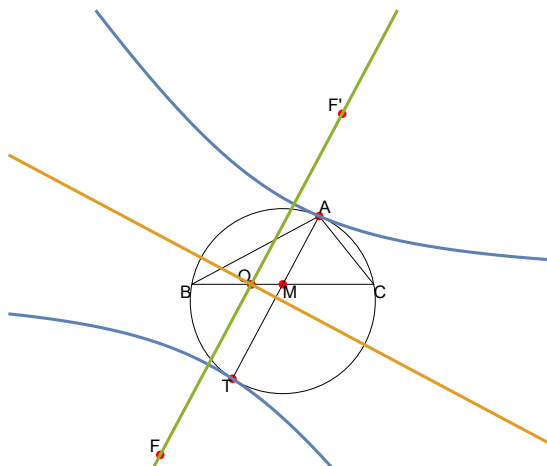
Eliminando el parámetro P calculamos su ecuación implícita $(-a+b)(a+b)y^2 - b(b + (-1+a^2+b^2-2ax)y) = 0$ que resulta ser una cónica. El cálculo de sus invariantes (el afín es $-a^2b^2$) nos indica que es una hipérbola que degenera en una recta si el triángulo es isósceles en A.

Out[389]=



En el anterior dibujo aparece la hipérbola con sus asíntotas una de las cuales es el lado BC. Asimismo se que es tangente al circuncírculo en A y en otro punto $T(-\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ tal que AMT están alineados, siendo M el punto medio de BC.

Out[407]=



En el anterior dibujo observamos como el eje focal es paralelo a AT, recta que une los puntos de tangencia citados y el centro $O(-\frac{1+a^2+b^2}{2a}, 0)$ está sobre BC.

Sus focos $F(\frac{-1-2a+a^2+b^2}{2a}, -\frac{b}{a})$ y $F'(\frac{-1+2a+a^2+b^2}{2a}, \frac{b}{a})$ de donde se deduce el paralelismo citado.

Además su distancia focal es $2\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ y su eje horizontal mide 2 igual que el lado BC.

Por lo que su excentricidad es $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$, lo que indica que si $a=b$ la hipérbola es equilateral.

Todavía se puede demostrar que el eje vertical (2) de la hipérbola es la mediatriz del segmento AT, lo que nos permitiría calcular su centro O y los ejes. Y dado que conocemos puntos A y T de la misma esta quedaría determinada a partir del triángulo inicial.

(1) Sus coordenadas (calculadas con "Mathematica") son

$$U\left(\frac{-a\left((1+a)^2+b^2\right)+2\left((1+a)^2+b^2\right)p+\left((-2+a)(1+a)^2+(2+a)b^2\right)p^2}{(-1+p)^2+2a(-1+p)^2+a^2(-1+p)^2+b^2(1+p)^2}, \frac{b(1+p)\left(1+2a+a^2+b^2+(-3+(-2+a)a+b^2)p\right)}{(-1+p)^2+2a(-1+p)^2+a^2(-1+p)^2+b^2(1+p)^2}\right)$$

$$\text{y } V\left(\frac{a^3(1+p)(3+p)+2a^2(5+3p)+a(3+p)\left(1-3p+b^2(1+p)\right)-2p\left(1-p+b^2(1+p)\right)}{(-1+p)^2+b^2(1+p)^2-2a(-1+p)(3+p)+a^2(3+p)^2}, \frac{b(1+p)\left(1+6a+a^2+b^2+(-3+a(2+a)+b^2)p\right)}{(-1+p)^2+b^2(1+p)^2-2a(-1+p)(3+p)+a^2(3+p)^2}\right).$$

La recta $f(p)$ tiene como ecuación

$$b^3(1+p)^2+b(1+p)(1-3p+a(4+a+ap-2(1+p)x))- = 0.$$

$$b^2(1+p)^2y+(1+a)(-1+p)(1-p+a(3+p))y$$

(2) Estos son $-1+a^2+b^2-2ax-2by=0$ y $b^3+b(-1+a^2-2ax)+2a^2y=0$.