

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 30 de abril de 2022

Problema 1048. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con $AB \neq AC$, se consideran dos puntos P y Q situados en las rectas AB y AC , respectivamente, tales que:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

Las rectas CP y BQ cortan a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en segundos puntos U y V , respectivamente. Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas UV cuando el punto P recorre la recta AB .

(Triángulos Cabri nº 1048)

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si:

$$\begin{cases} P = (1-t : t : 0) \\ Q = (1-t : 0 : t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

entonces:

$$\begin{cases} CP \equiv 0 = tx - (1-t)y \\ BQ \equiv 0 = tx - (1-t)z \end{cases}$$

Además, como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} U = ((1-t)[a^2t + b^2(1-t)] : t[a^2t + b^2(1-t)] : -c^2(1-t)t) \\ V = ((1-t)[a^2t + c^2(1-t)] : -b^2(1-t)t : t[a^2t + c^2(1-t)]) \end{cases}$$

por lo que:

$$UV \equiv a^2t^2x - (1-t)[a^2t + c^2(1-t)]y - (1-t)[a^2t + b^2(1-t)]z = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t :

$$\begin{cases} 0 = a^2t^2x - (1-t)[a^2t + c^2(1-t)]y - (1-t)[a^2t + b^2(1-t)]z \\ 0 = 2a^2tx + [a^2(2t-1) + 2c^2(1-t)]y + [a^2(2t-1) + 2b^2(1-t)]z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$a^2y^2 + a^2z^2 + 4c^2xy + 4b^2xz + 2a^2yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 30 de abril de 2022

que es una hipérbola con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $W = (0 : -a^2 + 2b^2 : a^2 - 2c^2)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2c^2 & 2b^2 \\ 2c^2 & a^2 & a^2 \\ 2b^2 & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = -4a^2(b-c)^2(b+c)^2 \neq 0$$

y tiene dos puntos en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = a^2y^2 + a^2z^2 + 4c^2xy + 4b^2xz + 2a^2yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1^\infty = (0 : 1 : -1) = BC_\infty \\ I_2^\infty = (4(b^2 - c^2) : a^2 - 4b^2 : -a^2 + 4c^2) \end{cases}$$

siendo una de sus asíntotas la recta BC . Además, esta hipérbola corta a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos $A = (1 : 0 : 0)$ y $X = (-a^2 : b^2 + c^2 : b^2 + c^2)$ de intersección entre ésta y la mediana correspondiente al vértice A , siendo tangentes ambas curvas en estos dos puntos, ya que, en ambos puntos, las dos curvas tienen recta tangente común:

$$\begin{cases} t_A \equiv 0 = c^2y + b^2z \\ t_X \equiv 0 = (b^2 + c^2)^2x + a^2b^2y + a^2c^2z \end{cases}$$

Vamos a distinguir tres casos:

① Si $a \neq 2b$ y $a \neq 2c$:

- ❶ Esta hipérbola corta a la recta AB , cuya ecuación es $z = 0$ en el punto $Z = (-a^2 : 4c^2 : 0)$, de forma que:

$$BZ^2 = \frac{a^4c^2}{(a-2c)^2(a+2c)^2} \Rightarrow BZ = \frac{a^2c}{|a-2c|(a+2c)} = \frac{a}{|a-2c|} \frac{ac}{(a+2c)}$$

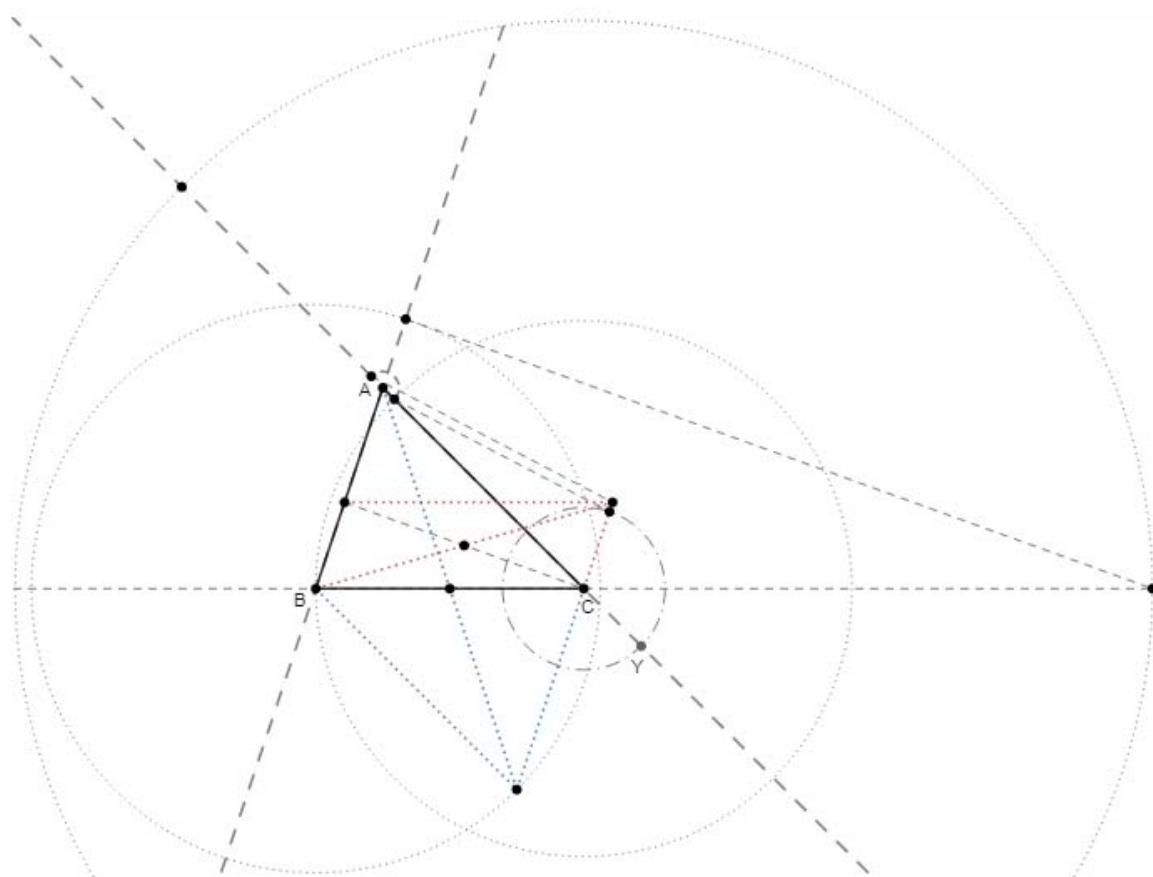
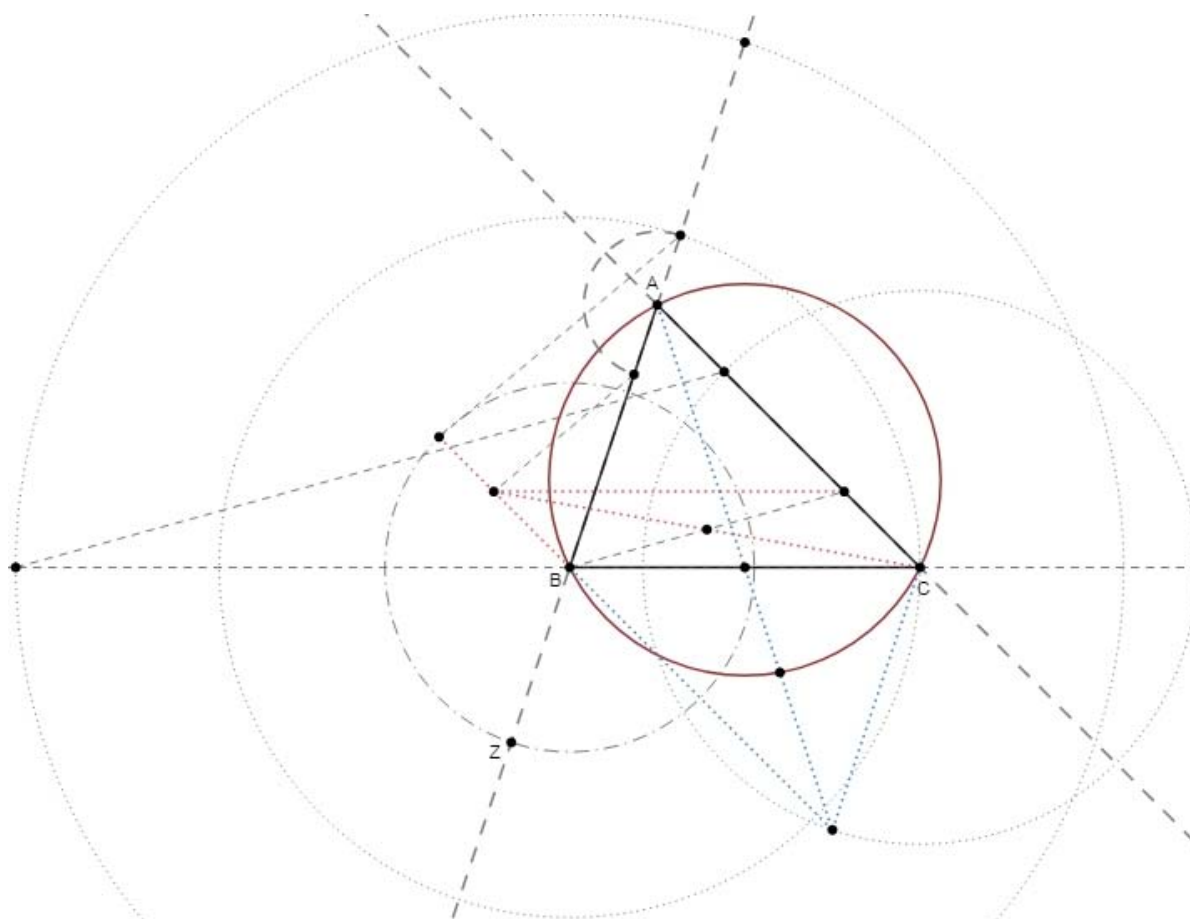
(la construcción de este punto se muestra a continuación)

- ❷ Esta hipérbola corta a la recta AC , cuya ecuación es $y = 0$ en el punto $Y = (-a^2 : 0 : 4b^2)$, de forma que:

$$CY^2 = \frac{a^4b^2}{(a-2b)^2(a+2b)^2} \Rightarrow CY = \frac{a^2b}{|a-2b|(a+2b)} = \frac{a}{|a-2b|} \frac{ab}{(a+2b)}$$

(la construcción de este punto se muestra a continuación)

TRIÁNGULOS CABRI
16 al 30 de abril de 2022



Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 30 de abril de 2022

- ③ La asíntota correspondiente al segundo punto del infinito de esta hipérbola, cuya ecuación es:

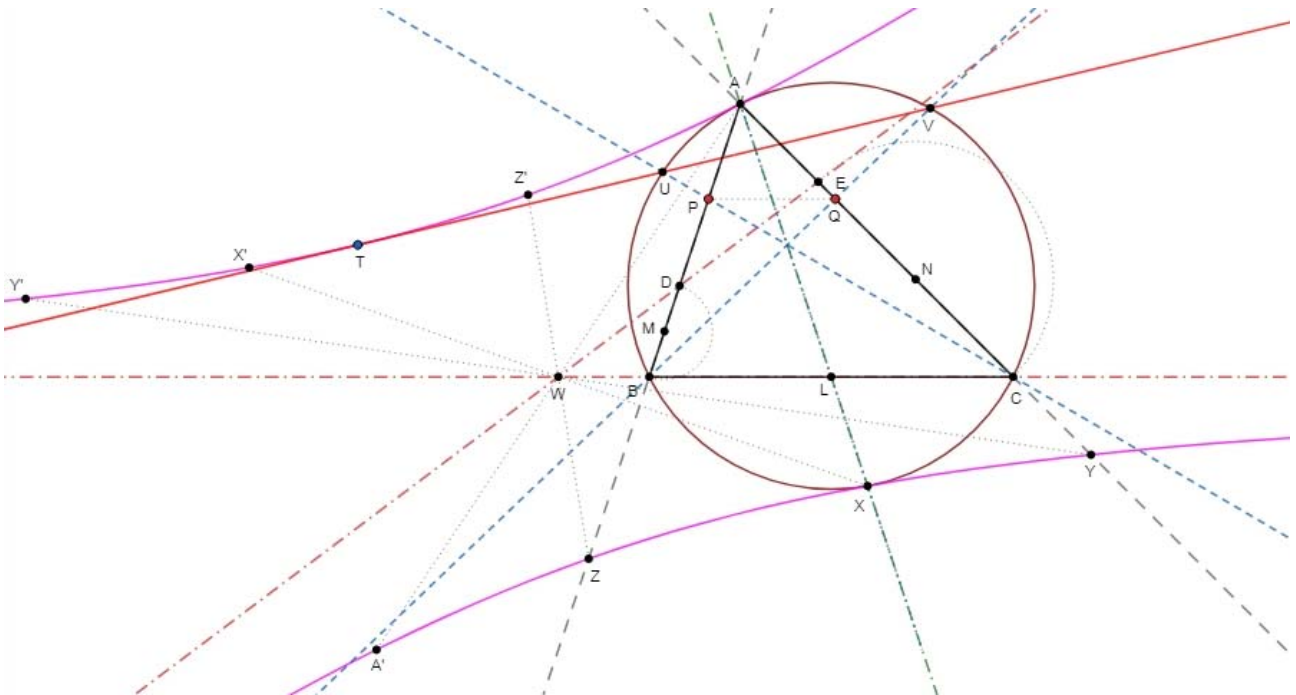
$$a^2x + 2(a^2 - 2c^2)y + 2(a^2 - 2b^2)z = 0$$

corta a las rectas AB y AC en los puntos $D = (2(-a^2 + 2c^2) : a^2 : 0)$ y $E = (2(-a^2 + 2b^2) : 0 : a^2)$, respectivamente, siendo:

$$\begin{cases} DZ^2 = c^2 \\ EY^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DZ = c \\ EY = b \end{cases}$$

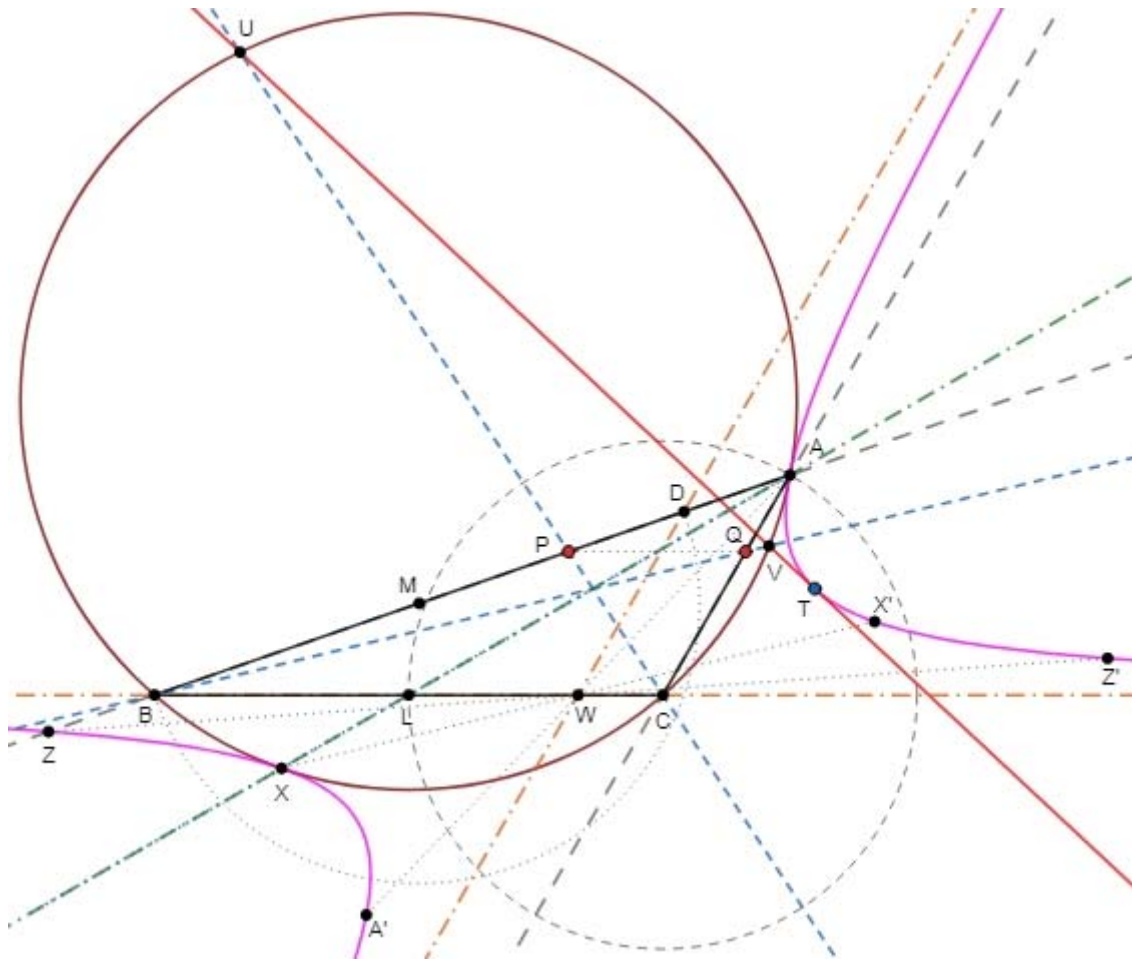
por lo que:

- ☺ El punto D es el punto simétrico del punto B con respecto al punto medio M del segmento AZ .
 - ☺ El punto E es el punto simétrico del punto C con respecto al punto medio N del segmento AY .
- ④ El centro W de esta hipérbola es el punto de intersección entre sus asíntotas, BC y DE .
- ⑤ Esta hipérbola pasa por los puntos simétricos A' , X' , Y' y Z' de los puntos A , X , Y y Z , respectivamente, con respecto al punto W .



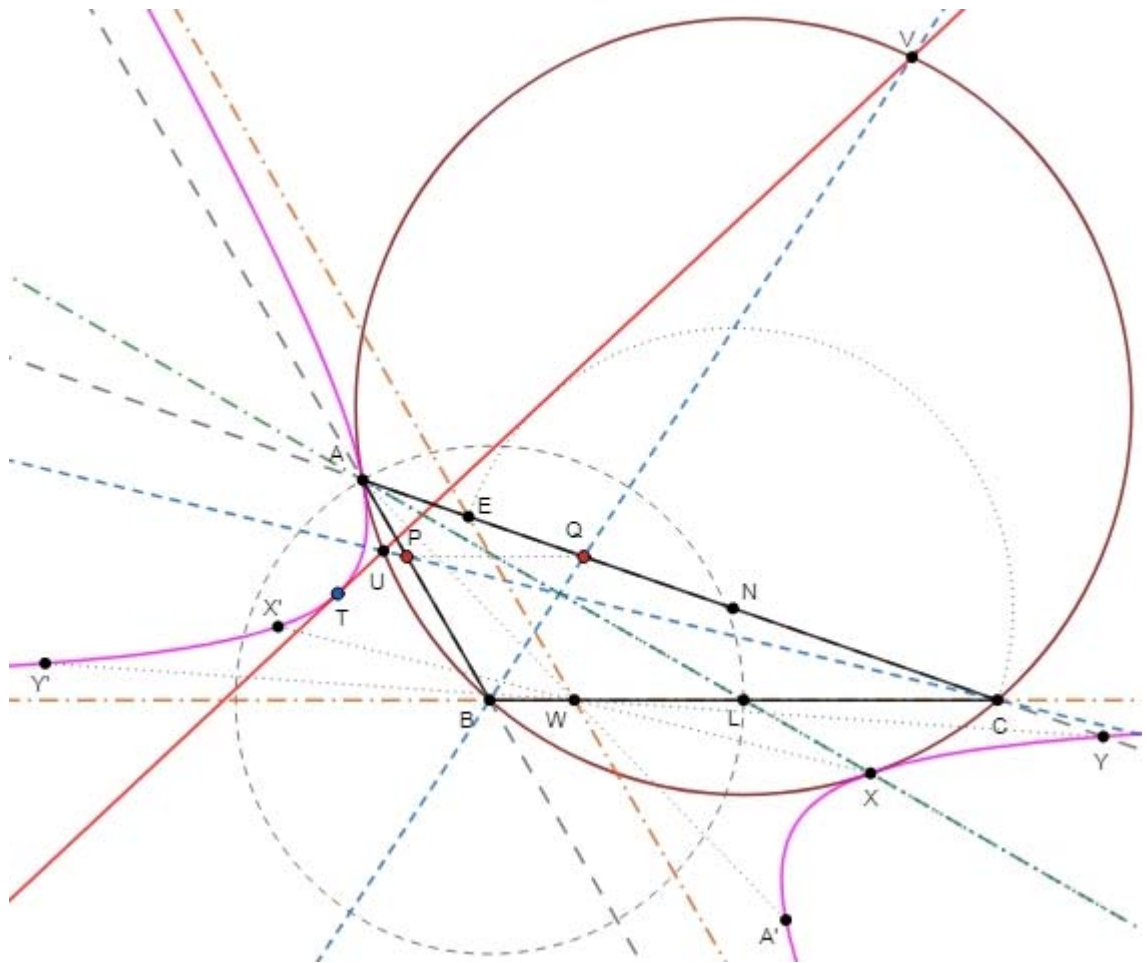
- ② Si $a = 2b (\neq 2c)$, los puntos Z y D pueden construirse como en el primer caso. Además, como el segundo punto del infinito de esta hipérbola es $I_2^\infty = (1 : 0 : -1) = AC_\infty$, entonces, la asíntota correspondiente es la recta paralela a AC pasando por el punto D , siendo el punto W el punto de intersección entre las dos asíntotas. Además, esta hipérbola pasa por los puntos A' , X' y Z' simétricos de los puntos A , X y Z , respectivamente, con respecto al punto W .

TRIÁNGULOS CABRI
16 al 30 de abril de 2022



- ③ Si $a = 2c (\neq 2b)$, los puntos Y y E pueden construirse como en el primer caso. Además, como el segundo punto del infinito de esta hipérbola es $I_2^\infty = (1 : -1 : 0) = AB_\infty$, entonces, la asíntota correspondiente es la recta paralela a AB pasando por el punto E , siendo el punto W el punto de intersección entre las dos asíntotas. Además, esta hipérbola pasa por los puntos A' , X' e Y' simétricos de los puntos A , X e Y , respectivamente, con respecto al punto W .

16 al 30 de abril de 2022



Miguel-Ángel Pérez García Ortega