TRIÁNGULOS CABRI
16 al 30 de abril de 2022

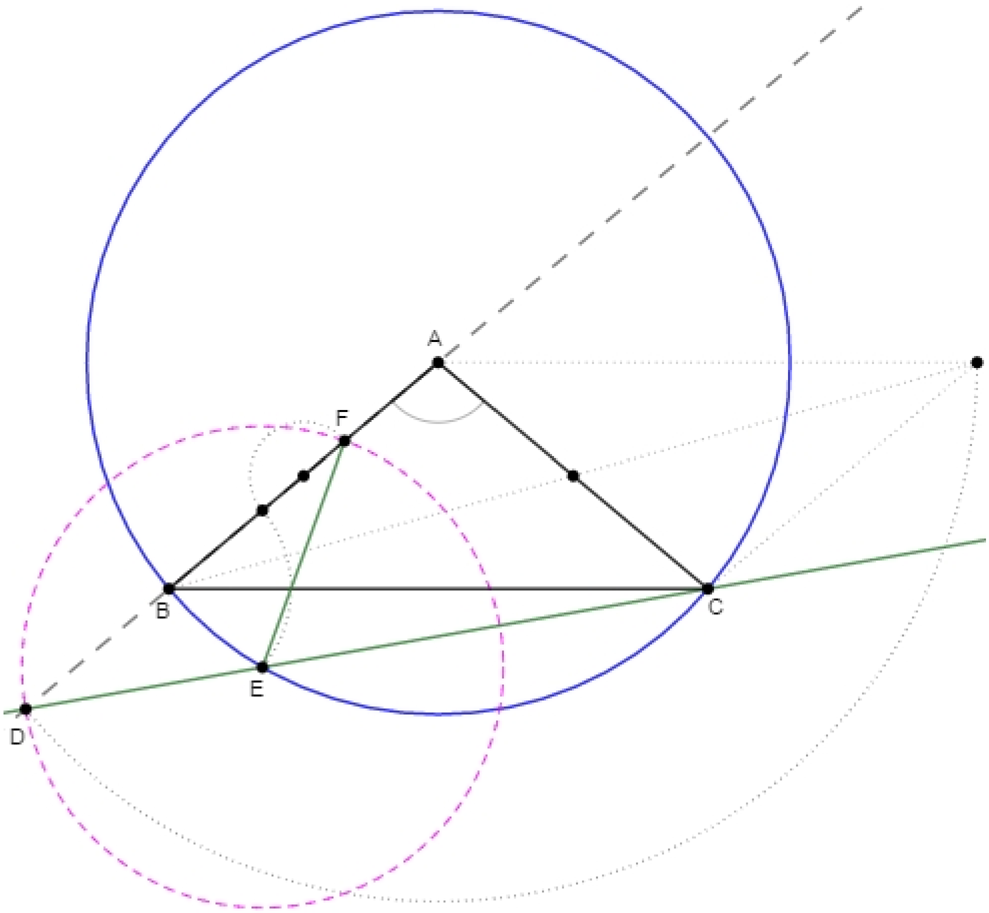
<u>Problema 1049.</u> (propuesto por Philippe Fondanaiche) Dados un triángulo isósceles ABC, con $AB = AC$ y tal que el ángulo $\measuredangle BAC$ es obtuso, y la circunferencia Γ con centro en A y radio AB, se consideran:

☺ El punto D situado sobre la recta AB tal que $AD = BC$, con B ubicado entre A y D.

😐 El segundo punto de intersección E entre la recta CD y la circunferencia Γ.

☺ El punto F situado sobre el segmento AB tal que $AF = BE$.

Demostrar que el triángulo DEF es isósceles de vértice E si y sólo si el ángulo $\measuredangle BAC$ toma un cierto valor que habrá que determinar.



<u>Solución:</u>

Como $b = c$, se verifica que:

$$\begin{cases} S_A = \dfrac{2b^2 - a^2}{2} \underset{\measuredangle BAC \text{ es obtuso}}{<} 0 \Rightarrow k = \dfrac{a}{b} > \sqrt{2} \\ S_B = S_C = \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 al 30 de abril de 2022

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $D=(b-a:a:0)$, entonces:

$$CD \equiv ax+(a-b)y+z=0$$

y:

$$\Gamma \equiv b^2xy+b^2xz+a^2yz+b^2x(x+y+z)=0$$

por lo que, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$E=CD\cap\Gamma=((b-a)(a^3-2ab^2+2b^3):a(a^3-2ab^2+2b^3):b^2(a+b)(a-b))$$

siendo el pie del punto E sobre la recta AB el punto:

$$M=((2b-a)(2b+a)(a-b)^2:a^4-a^2b^2+4ab^3-2b^4:0)$$

y, si el el triángulo DEF es isósceles de vértice E, como el punto F es el punto simétrico del punto E con respecto al punto M, resulta que:

$$F=((a-b)(2a^2+2ab-3b^2):(2b-a)(a^2+ab-b^2):0)$$

Una vez determinado el punto F, como:

$$\begin{aligned} BE^2-AF^2 &= \frac{a(2b-a)(2b+a)(a-b)^2}{a^3+a^2b-2ab^2+b^3}-\frac{b^2(2b-a)^2(a^2+ab-b^2)^2}{(a^3+a^2b-2ab^2+b^3)^2} \\ &= \frac{ab(2b-a)(a^2+2ab-2b^2)(a^3-3ab^2+b^3)}{(a^3+a^2b-2ab^2+b^3)^2} \end{aligned}$$

entonces:

$$BE=AF \Leftrightarrow BE^2=AF^2 \Leftrightarrow (a^2+2ab-2b^2)(a^3-3ab^2+b^3)=0 \underset{k>\sqrt{2}}{\Leftrightarrow} k^3-3k+1=0$$

estando (según el Teorema de Bolzano) la raíz de esta ecuación que nos interesa situada en el intervalo $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right)$ y siendo también raíz de la ecuación:

$$0=(k^3-3k+1)(-k^3+3k+1)=-k^6+6k^4-9k^2+1$$

Finalmente, como, según el Teorema del Coseno, $\cos A=1-\frac{k^2}{2}$, entonces:

$$k=\pm\sqrt{2(1-\cos A)}$$

por lo que, sustituyendo en la ecuación anterior, resulta que:

$$8\cos^3 A-6\cos A-1=0$$

lo cual nos lleva a pensar en los polinomios de Chebyshev. Como el polinomio de Chebyshev para $n=9$ es:

$$T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

y:

$$\begin{cases} T_9\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)\right] = \cos(\pi) = -1 \\ T_9\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right)\right] = \cos(\pi) = -1 \\ T_9\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{9}\right)\right] = \cos(\pi) = -1 \end{cases}$$

entonces, $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)$ y $\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$ son raíces de la ecuación:

$$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x = -1$$

es decir, son raíces de la ecuación:

$$0 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x + 1 = (x+1)(2x-1)^2(8x^3 - 6x - 1)^2$$

y, por tanto, estas son las tres raíces de la ecuación:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

lo cual significa que:

$$\begin{cases} \triangle BAC = \dfrac{\pi}{9} < \dfrac{\pi}{2} \to \text{no vale} \\ \text{ó} \\ \triangle BAC = \dfrac{5\pi}{9} > \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ó} \\ \triangle BAC = \dfrac{7\pi}{9} > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

y como:

$$\frac{7\pi}{9} > \frac{3\pi}{4} \underset{\text{decreciente}}{\Rightarrow} \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) < \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

entonces:

$$\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right]} > \sqrt{2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \frac{7}{4}$$

por lo que la única solución válida es $\triangle BAC = \frac{5\pi}{9}$.

Miguel-Ángel Pérez García Ortega