

Problema n°1049

Considere un triángulo isósceles ABC ($AB = AC$) cuyo ángulo en A es obtuso y el círculo (Γ) con centro A y radio AB .

Sea el punto D sobre la recta $[AB]$ tal que $AD = BC$ con B ubicado entre A y D .

La recta $[CD]$ interseca (Γ) en el punto E .

Sea el punto F sobre el segmento AB tal que $AF = BE$.

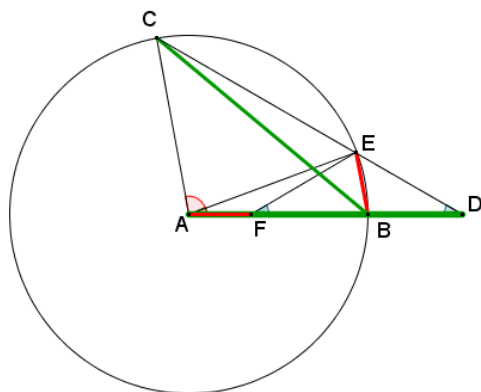
Demostrar que el triángulo DEF es isósceles de vértice E si y sólo si el ángulo $\alpha = \angle BAC$ toma un cierto valor α_0 que determinaremos.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Réponse : le triangle DEF est isocèle de sommet E si et seulement si l'angle $\angle BAC$ est égal à 100° .

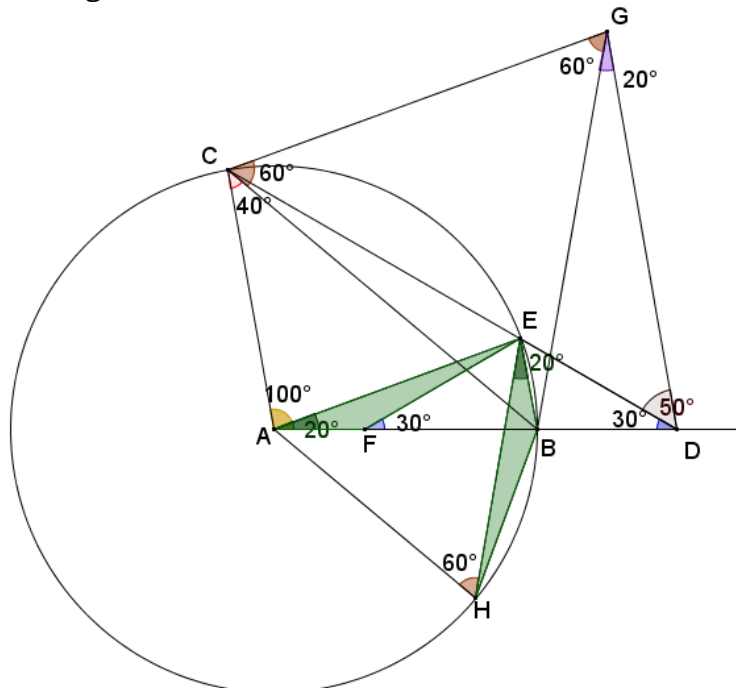
Démonstration

Le triangle ABC et les points D, E, F mis en situation générale se présentent comme suit :



Lemme

Avec l'angle $\angle BAC = 100^\circ$, le triangle DEF est isocèle de sommet E et $\angle DEF = 120^\circ$, $\angle EDF = \angle EFD = 30^\circ$



On trace le triangle équilatéral BCG avec le sommet G de l'autre côté de A par rapport à la droite $[BC]$. Le triangle BAC étant isocèle, $\angle ACB = (180^\circ - 100^\circ)/2 = 40^\circ$, il en résulte que $\angle ACG = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ = \angle BAC$.

Comme $BC = AD = CG$, le quadrilatère $ADGC$ est un trapèze isocèle. Le côté DG est donc parallèle à AC et $\angle ADG = \angle CGD = 80^\circ$. D'où $\angle BGD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ et $\angle DBG = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ$. Le triangle BGD est isocèle de sommet G et $GB = GD = GC$. Dès lors $\angle CDG = (180^\circ - 80^\circ)/2 = 50^\circ$ et $\angle ADC = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$, soit $\angle EDF = 30^\circ$

On trace le triangle équilatéral AEH avec le sommet H de l'autre côté de C par rapport à la droite [AB].
 Comme $\angle ACD = 180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$, $\angle CAE = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$. D'où $\angle BAE = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ et $\angle BAH = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$ qui est le double de l'angle $\angle BEH$ qui est sous-tendu par l'arc BH dans le cercle de centre A et de rayon AB. Il en résulte que $\angle BEH = \angle FAE = 20^\circ$. Par construction $AF = BE$ et $AF = EH$, les deux triangles AEF et EHB sont isométriques. $\angle BEH = \angle AEF = \angle BAE/2 = 10^\circ$ et $\angle BAE + \angle AEF = \angle BFE = 30^\circ$.
Le triangle DEF est donc isocèle quand l'angle $\angle BAC$ prend la valeur 100° .

Il ne reste plus qu'à démontrer que **cette valeur est unique** quand l'angle $\angle BAC$ prend tout autre valeur comprise entre 90° (inclus) et 180° (exclu*)

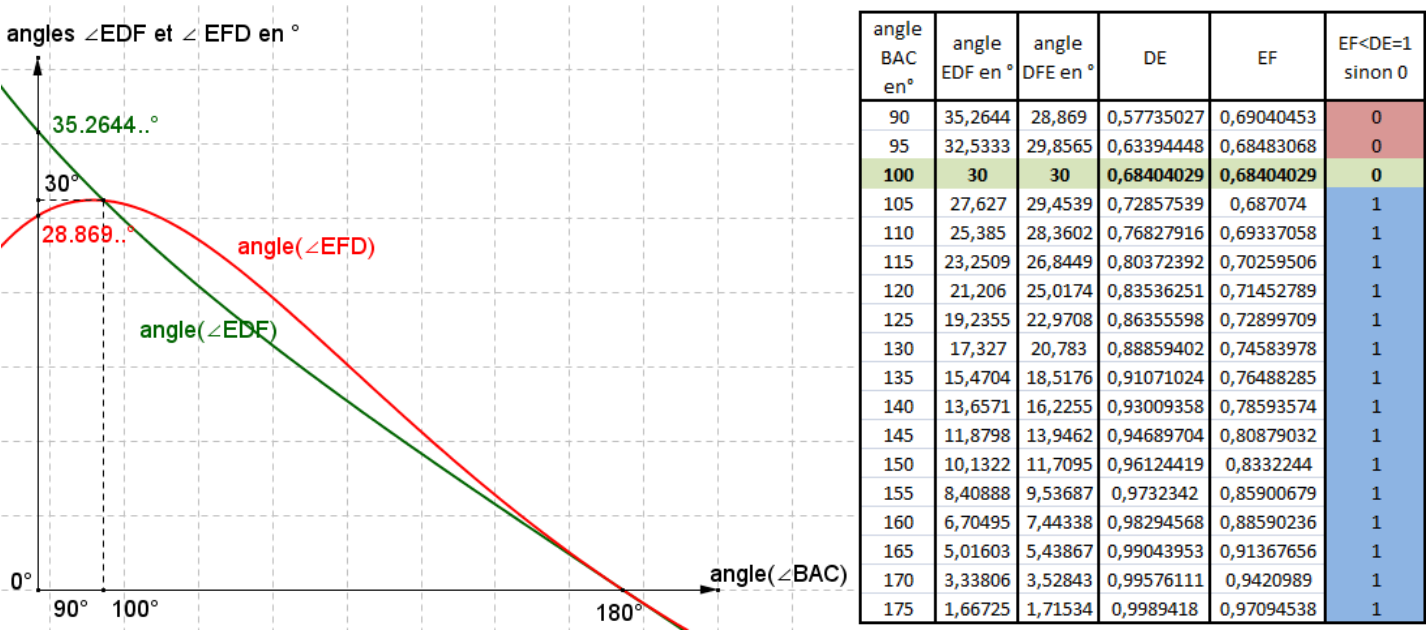
On prend par convention sans perte de généralité $AB = AC = 1$.

Lorsque le point C parcourt continûment le quart de cercle du quadrant nord-ouest du cercle de centre A et de rayon AB, l'angle $2\alpha = \angle BAC$ varie continûment de 90° à 180° - de même que les angles $\delta = \angle EDF$ et $\varepsilon = \angle EFD$ qui sont reliés à l'angle α par les relations suivantes :

$$\delta = \angle EDF = \arctangente(\sin(2\alpha)/(2\sin(\alpha) - \cos(2\alpha)))$$

$$\varepsilon = \angle DEF = \arctangente(2\cos(\alpha+\delta)\sin(2\alpha+2\delta)/(1+2\cos(\alpha+\delta)\sin(2\alpha+2\delta)))$$

Les courbes représentatives de ces deux angles en fonction de α sont les suivantes : **$\angle EDF$ en vert et $\angle DEF$ en rouge.**



L'angle $\angle EDF$ décroît continûment de la valeur $35,2644^\circ$ à la valeur 0° + en passant par la valeur de 30° pour laquelle $\angle BAC = 100^\circ$ tandis que l'angle $\angle DFE$ part de la valeur $28,869^\circ$ puis s'accroît jusqu'à la valeur 30° obtenue aussi avec $BAC = 100^\circ$ puis décroît jusqu'à la valeur 0° + tout en restant toujours supérieur à l'angle $\angle EDF$.

Il en résulte que les côtés ED et EF du triangle DEF ne s'égalisent que lorsque les angles opposés sont égaux à savoir pour l'unique valeur de l'angle $\angle BAC = 100^\circ$.

Le tableau ci-dessus qui donne les valeurs de DE et EF et dans lequel on fait varier l'angle $\angle BAC$ par pas de 5° confirme ces résultats.

* Le triangle ABC est alors dégénéré en un segment de droite égal au diamètre du cercle de centre A et de rayon AB).