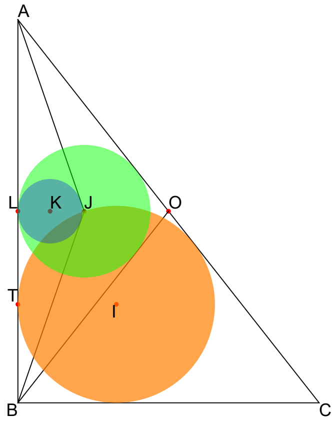
Pr. Cabri 1050

Enunciado

Dado un triángulo rectángulo ABC, O su circuncentro, I su incentro, J el incentro de ABO, K el incentro de ABJ.
Demostrar que r(I) = r(J) + r(K) ⇔ ABC es un triángulo de Kepler.

Propuesto por Juan José Isach Mayo, España.



Solución

de César Beade Franco

En un triángulo de Kepler la proporción entre los lados es $1:\sqrt{\phi}:\phi$.
Consideremos el triángulo de vértices A(0,b), B(0,0) y C(1,0) cumpliendo las condiciones del problema.
Los radios son, respectivamente $r(I) = \frac{b}{1+b+\sqrt{1+b^2}}$, $r(J) = \frac{b}{2\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)}$ y $r(K) = \frac{b}{2\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)^2}}\right)}$

Resolviendo la ecuación r(I) = r(J) + r(K) ⇔ $\frac{b}{1+b+\sqrt{1+b^2}} = \frac{b}{2\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)} + \frac{b}{2\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\left(b+\sqrt{1+b^2}\right)^2}}\right)}$

obtenemos (*) $b = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, por lo que $AB = \sqrt{\phi}$, BC = 1 y CA = ϕ y el triángulo ABC es de Kepler.

Nota

(*) Eliminando b y haciendo $k = b + \sqrt{1+b^2}$, la ecuación anterior queda

$$\frac{1}{1+k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\right)}$$

De todas formas el resultado se obtuvo con “Mathematica”.