

Problema 1050

Propuesto por Juan José Isach Mayo, España.

Sea el $\triangle ABC$ rectángulo con $a < c < b$

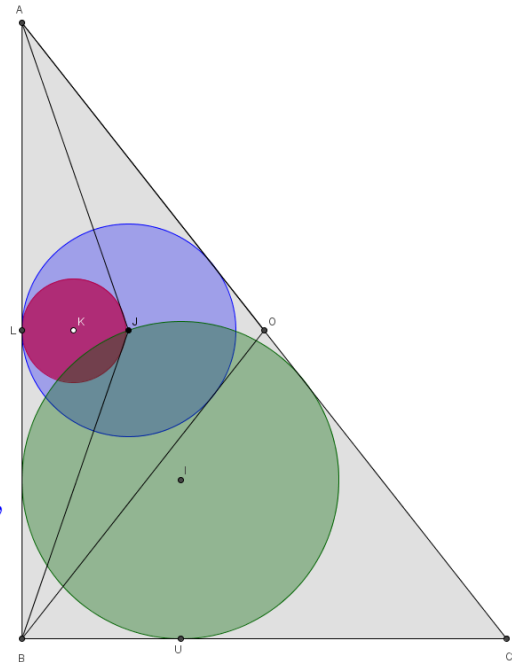
I incentro $\triangle ABC$, O circuncentro $\triangle ABC$,

J incentro $\triangle AOB$,

$r = \text{inradio } \triangle ABC$,

$r_1 = \text{inradio } \triangle AOB$,

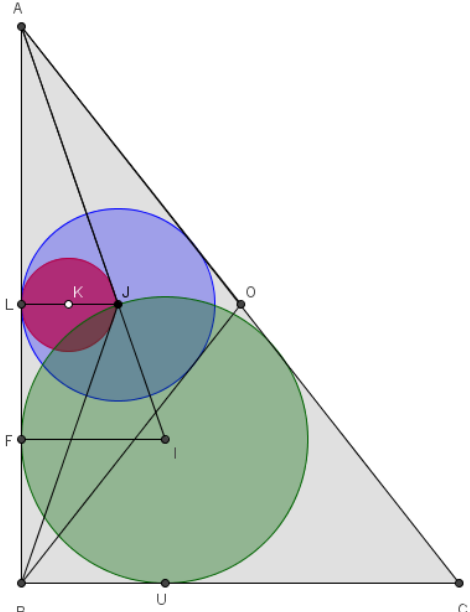
$r_2 = \text{inradio } \triangle ABJ$,



$$r = r_1 + r_2 \iff \triangle ABC \text{ es de Kepler}$$

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros (Córdoba).

Con las notaciones habituales, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

 Sabemos que: $r = \frac{a - b + c}{2}$	Por la semejanza que hay entre los $\triangle AJL$ y $\triangle AIF$; $\frac{\frac{r_1}{c}}{\frac{r}{2}} = \frac{r}{c - r} \rightarrow$ $r_1 = \frac{c r}{2(c - r)}$	Por otra parte, $\tan\left(\frac{A}{4}\right) = \frac{r_2}{\frac{c}{2}}$ Y así de este modo, $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\frac{r_1}{c}}{\frac{c}{2}} = \frac{r}{c - r}$ Ahora bien, $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{A}{4}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{A}{4}\right)}$ Por tanto, $\frac{r}{c - r} = \frac{4 \frac{r_2}{c}}{1 - \frac{4r_2^2}{c^2}} = \frac{4r_2 c}{c^2 - 4r_2^2}$ $4r r_2^2 + (4c^2 - 4cr)r_2 - c^2 r = 0$
---	---	---

Podemos expresar la diferencia $r - r_1$ del modo:

$$r - r_1 = \frac{(b-a)(a-b+c)}{2(-a+b+c)}$$

En la ecuación cuadrática $4r r_2^2 + (4c^2 - 4cr)r_2 - c^2 r = 0$ de existir solución para r_2 solamente habría un valor que fuese positivo. Vamos a probar bajo qué condiciones la expresión $r - r_1 (= r_2)$ es esta solución para el valor de r_2 .

Sustituimos este valor en la ecuación y resulta que:

$$4r r_2^2 + (4c^2 - 4cr)r_2 - c^2 r = 0 \rightarrow$$

$$4 \left(\frac{a-b+c}{2} \right) \frac{(b-a)^2(a-b+c)^2}{4(-a+b+c)^2} + \left(4c^2 - 4c \frac{a-b+c}{2} \right) \frac{(b-a)(a-b+c)}{2(-a+b+c)} - c^2 \left(\frac{a-b+c}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-(a-b+c)(-a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 - 4a^2c^2 + 8abc^2 - 4b^2c^2 + c^4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$c^4 - 4(b-a)^2c^2 - (b-a)^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$c^2 = \frac{4(b-a)^2 + \sqrt{16(b-a)^4 + 4(b-a)^4}}{2} = (2 + \sqrt{5})(b-a)^2$$

Sea que $a = 1$, lo cual no resta generalidad al problema. Por tanto, podemos expresar la anterior relación del modo:

$$c^2 = (2 + \sqrt{5})(b-1)^2$$

Como quiera que el ΔABC es rectángulo, $(a = 1 < c < b) \rightarrow c^2 = b^2 - 1$

$$c^2 = (2 + \sqrt{5})(b-1)^2 \Leftrightarrow b^2 - 1 = (2 + \sqrt{5})(b-1)^2 \Leftrightarrow b + 1 = (2 + \sqrt{5})(b-1)$$

$$\Leftrightarrow b(1 + \sqrt{5}) = 3 + \sqrt{5} \Leftrightarrow b = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \Leftrightarrow \{a = 1, b = \phi, c = \sqrt{\phi}\}$$

En definitiva, $a = 1, b = \phi \rightarrow c = \sqrt{b^2 - 1} = \sqrt{\phi^2 - 1} = \sqrt{\phi}$

Por tanto, hemos probado que bajo estas condiciones,

$$r = r_1 + r_2 \iff \Delta ABC \text{ es de Kepler}$$