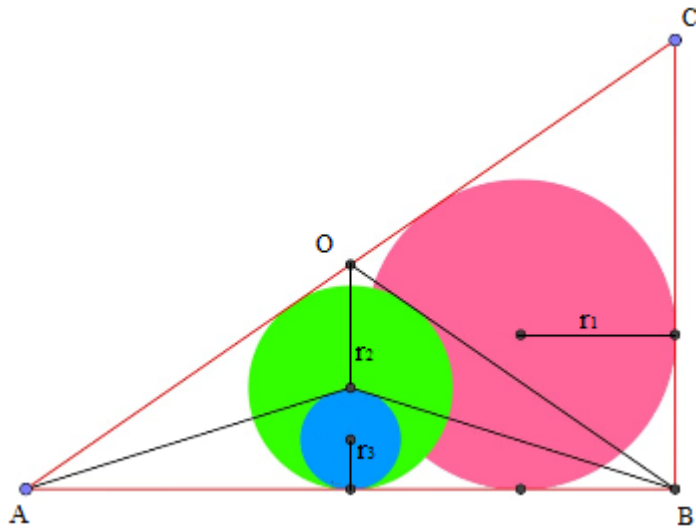


TRIÁNGULOS CABRI

16 al 30 de abril de 2022

Problema 1050. (propuesto por Juan-José Isach Mayo) Probar que el triángulo rectángulo que se muestra en la siguiente figura es un triángulo de Kepler si y sólo si $r_1 = r_2 + r_3$:



Solución:

En primer lugar, vamos a calcular la distancia d entre el incentro y uno de los vértices del lado desigual de un triángulo UVW tal que $UV = UW$. Utilizando el Teorema de Pitágoras, como:

$$d^2 = \frac{(-u + v + v)(u - v + v)(u + v - v)}{4(u + v + v)} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2(2v - u)}{4(u + 2v)} + \frac{u^2}{4} = \frac{u^2v}{u + 2v}$$

entonces:

$$d = u \sqrt{\frac{v}{u + 2v}}$$

Una vez visto esto, por razones de proporcionalidad, podemos suponer que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{t^2 + 1} \\ c = t \end{cases}$$

por lo que las áreas de los tres triángulos considerados son:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \frac{t}{2} \\ \Delta_2 = \frac{\Delta_1}{2} = \frac{t}{4} \\ \Delta_3 = r_2 \Delta_1 = r_2 \left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 30 de abril de 2022

y los semiperímetros de los dos triángulos menores son:

$$\begin{cases} s_2 = \frac{t + 2\left(\frac{b}{2}\right)}{2} = \frac{t+b}{2} \\ s_3 = \frac{t+2d}{2} \end{cases}$$

siendo:

$$d = t \sqrt{\frac{\frac{b}{2}}{2\left(\frac{b}{2}\right) + t}} = t \sqrt{\frac{b}{2(b+t)}}$$

la distancia entre el punto A y el incentro del triángulo OAB . De esta forma, se verifica que:

$$\textcircled{1} \quad r_1 = \frac{1+t-b}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad r_2 = \frac{\Delta_2}{s_2} = \frac{\frac{t}{4}}{\frac{t+b}{2}} = \frac{t}{2(t+b)}$$

$$\textcircled{3} \quad r_3 = \frac{\Delta_3}{s_3} = \frac{r_2\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t+2d}{2}} = \frac{r_2 t}{t+2d} = \frac{\frac{t^2}{2(t+b)}}{t+2t\sqrt{\frac{b}{2(b+t)}}} = \frac{t}{2(t+b)\left[1 + \sqrt{\frac{2b}{b+t}}\right]}$$

por lo que $r_1 = r_2 + r_3$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 - r_2 - r_3 \\ &= \frac{1+t-b}{2} - \frac{t}{2(t+b)} - \frac{t}{2(t+b)\left[1 + \sqrt{\frac{2b}{b+t}}\right]} \\ &= -\frac{(b^2 - b - t^2)\sqrt{\frac{2b}{b+t}} + b^2 - b - t(t-1)}{2(t+b)\left[1 + \sqrt{\frac{2b}{b+t}}\right]} \\ &= -\frac{(t^2 + 1 - b - t^2)\sqrt{\frac{2b}{b+t}} + t^2 + 1 - b - t(t-1)}{2(t+b)\left[1 + \sqrt{\frac{2b}{b+t}}\right]} \\ &= -\frac{(1-b)\sqrt{\frac{2b}{b+t}} + 1 - b + t}{2(t+b)\left[1 + \sqrt{\frac{2b}{b+t}}\right]} \end{aligned}$$

TRIÁNGULOS CABRI

16 al 30 de abril de 2022

es decir, si y sólo si:

$$(1-b)\sqrt{\frac{2b}{b+t}} = -1+b-t$$
$$(1-b)^2\left(\frac{2b}{b+t}\right) = (-1+b-t)^2$$

lo cual es equivalente a que:

$$\begin{aligned} 0 &= b^3 + b^2(t-2) + b(t^2+1) - t(t+1)^2 \\ &= b(t^2+1) + (t^2+1)(t-2) + b(t^2+1) - t(t+1)^2 \\ &= 2[b(t^2+1) - (2t^2+1)] \end{aligned}$$

Finalmente, $r_1 = r_2 + r_3$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} b(t^2+1) &= (2t^2+1) \\ b^2(t^2+1)^2 &= (2t^2+1)^2 \\ (t^2+1)(t^2+1)^2 &= (2t^2+1)^2 \\ t^2(t^4-t^2-1) &= 0 \end{aligned}$$

por lo que:

$$r_1 = r_2 + r_3 \Leftrightarrow_{t>0} t^4 - t^2 - 1 = 0 \quad \begin{array}{c} \text{este polinomio tiene} \\ \Leftrightarrow \\ \text{una única raíz positiva} \end{array} \quad t = \sqrt{\phi}$$

en cuyo caso, $b = \sqrt{\phi+1} = \sqrt{\phi^2} = \phi$ y, por tanto, $r_1 = r_2 + r_3$ si y sólo si ABC es un triángulo de Kepler.