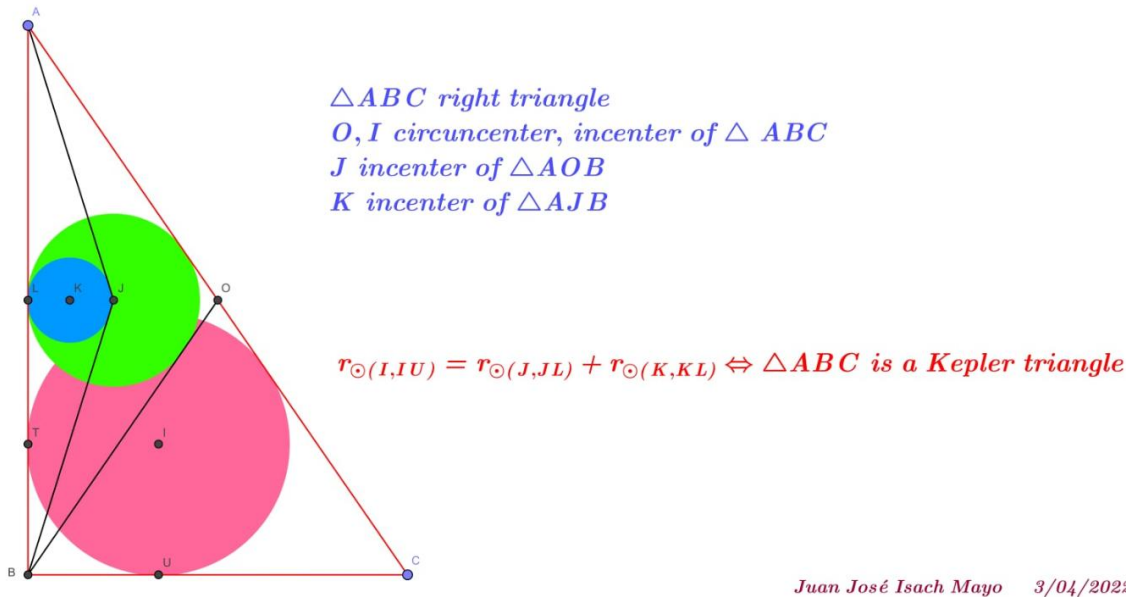


Problema n°1050



Solution proposée par Philippe Fondanaiche

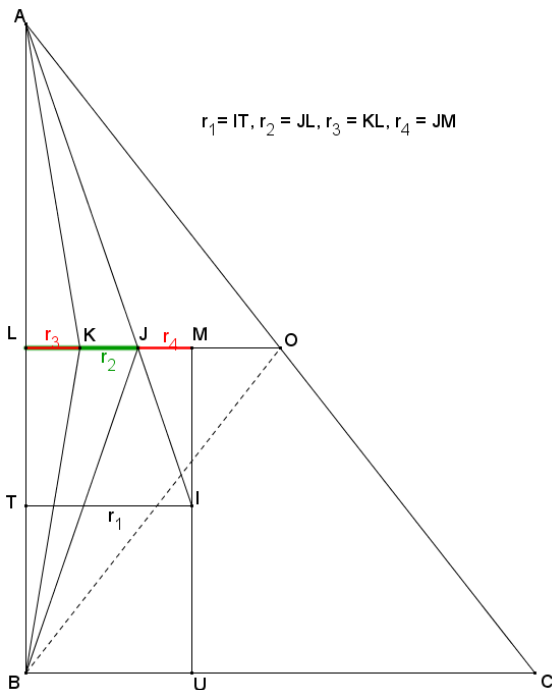
Avec les notations de la figure ci-après, on pose $r_1 = IT$, $r_2 = JL$, $r_3 = KL$ et $r_4 = JM$

Les côtés du triangle ABC sont désignés par $BC = a$ ($= 1$ sans perte de généralité), $BC = b$ et $AB = c$, $b > 1$.

1^{er} cas $r_1 + r_2 = r_3$

Démontrons que le triangle ABC est un triangle de Képler défini par :

$$BC = 1, AC = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ et } AB = \sqrt{\varphi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$



Comme $IT = ML = MJ + JL$, la relation $r_1 = r_2 + r_4$ entraîne $r_3 = r_4$.

Comme les triangles rectangles ALJ et IMJ sont semblables on a :

$r_4/MJ = r_2/AL$ avec $MJ = c/2 - r_1$ avec $r_1(1 + b + c) = 2$ fois aire triangle ABC = $1 \cdot c = c$, soit **$r_1 = c/(b + c + 1)$**

$AL = AB/2 = c/2$ et $r_2(2b + 2c) = 2$ fois aire triangle AOB = $c/2$, soit **$r_2 = c/2(b+c)$**

Il en résulte que $r_3 = r_4 = r_2 \cdot MJ/AL = (b + c - 1) r_2 / (b + c + 1)$

Par ailleurs $r_3(c + 2AJ) = 2$ fois aire triangle ABJ = $r_2 c$.

D'où $AJ = c/(b + c - 1)$.

AJ est l'hypoténuse du triangle rectangle ALJ $\rightarrow AJ^2 = AL^2 + JL^2$.

D'où $c^2/(b + c - 1)^2 = c^2/4 + c^2/4(b + c)^2$ qui se ramène à :

$$4/(b + c - 1)^2 = 1 + 1/(b + c)^2$$

On pose $b + c = x$ et l'on obtient l'équation en x :

$4/(x - 1)^2 = 1 + 1/x^2$ qui a pour racine $x = \varphi + \sqrt{\varphi}$ avec $\varphi =$ nombre d'or (voir annexe).

Comme $b^2 = c^2 + 1$, on en déduit **$b = \varphi$ et $c = \sqrt{\varphi}$**

2^{ème} cas $BC = 1$, $AB = c = \sqrt{\varphi}$, $AC = b = \varphi$

Démontrons que $r_1 = r_2 + r_3$. On reprend les formules du premier cas avec :

$$r_1 = c/(b + c + 1) = \sqrt{\varphi}/(1 + \sqrt{\varphi} + \varphi) \text{ et } r_2 = \sqrt{\varphi}/2(\sqrt{\varphi} + \varphi) = 1/2(\sqrt{\varphi} + 1)$$

Comme $AJ^2 = AL^2 + JL^2$ avec $r_2 = JL$, on en déduit $4AJ^2 = \varphi + 1/(\sqrt{\varphi} + 1)^2$.

Par ailleurs $r_3(c + 2AJ) = r_2c$. D'où $r_3 = r_2 \sqrt{\varphi} / (\sqrt{\varphi} + 2AJ)$

Il s'agit de montrer que :
$$\frac{\sqrt{\varphi}}{(1 + \sqrt{\varphi} + \varphi)} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{\varphi})} + \frac{\sqrt{\varphi}}{2(1 + \sqrt{\varphi})(\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi + \frac{1}{(\sqrt{\varphi} + 1)^2}})} \quad (R)$$

On vérifie que $\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi + \frac{1}{(\sqrt{\varphi} + 1)^2}} = \varphi + 1$.

Il en résulte que la relation (R) se ramène à $(1 + \sqrt{\varphi} + \varphi)^2 = 2(\varphi + \sqrt{\varphi})(\varphi + 1)$ qui se vérifie aussi aisément.

Vérification numérique

Avec des valeurs numériques à 10 décimales données supra de r_1, r_2 et r_3 , on obtient :

$$r_1 = 0,3269928304....$$

$$r_2 = 0,2200685193.....$$

$$2AJ = 1,3460143392...$$

$$r_3 = 0,1069243111...$$

$$\text{et } r_1 = r_2 + r_3$$

Annexe

D'après Wolfram Alpha

solve	$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{(x-1)^2}$
-------	---

Results

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{5} - i \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{5} + i \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} - \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{2(1 + \sqrt{5})} \right)$$