TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de mayo de 2022

<u>Problema 1051.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se consideran dos puntos P y Q situados en las rectas BC y CA, respectivamente, tales que:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{CQ}{CA}$$

Las rectas AP y BQ cortan a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en segundos puntos U y V, respectivamente. Determinar y representar gráficamente la curva envolvente de las rectas UV cuando el punto P recorre la recta BC.

<u>*Solución:*</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (0 : 1-t : t)$ $(t \in \mathbb{R})$, la recta paralela a AB pasando por P:

$$tx + ty - (1-t)z = 0$$

corta a la recta CA, cuya ecuación es $y = 0$, en el punto simétrico $Q' = (1-t : 0 : t)$ del punto del punto Q con respecto al punto medio $M = (1 : 0 : 1)$ del segmento CA, por lo que $Q = (t : 0 : 1-t)$ y, por tanto:

$$\begin{cases} AP \equiv 0 = ty - (1-t)z \\ BQ \equiv 0 = (1-t)x - tz \end{cases}$$

Además, como la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es:

$$c^2xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} U = (a^2(1-t)t : -(1-t)[c^2(1-t) + b^2t] : -t[c^2(1-t) + b^2t]) \\ V = (t[a^2(1-t) + c^2t] : -b^2(1-t)t : (1-t)[a^2(1-t) + c^2t]) \end{cases}$$

por lo que:

$$UV \equiv (1-t)[c^2(1-t) + b^2t]x + t[a^2(1-t) + c^2t]y - c^2(1-t)tz = 0$$

Una vez determinadas las ecuaciones de todas estas rectas, vamos a determinar su envolvente, para lo cual tenemos que eliminar el parámetro t del sistema formado por la ecuación anterior y su ecuación derivada con respecto a t:

$$\begin{cases} 0 = (1-t)[c^2(1-t) + b^2t]x + t[a^2(1-t) + c^2t]y - c^2(1-t)tz \\ 0 = [b^2(2t-1) + 2c^2(1-t)]x + [a^2(2t-1) - 2c^2t]y + c^2(1-2t)z \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

por lo que, despejando t en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$b^4x^2 + a^4y^2 + c^4z^2 + 2(a^2b^2 - c^4)xy - 2b^2c^2xz - 2a^2c^2yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

que es una elipse con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto:

$$\begin{aligned}W &= (c^2(a^2+c^2) : c^2(b^2+c^2) : 2a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2c^4)\\ &= \left(\frac{c^2(a^2+c^2)}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)} : \frac{c^2(b^2+c^2)}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)} : \frac{2a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2c^4}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}\right)\\ &= \left(\frac{a^2+c^2}{2\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2\right)} : \frac{b^2+c^2}{2\left(\frac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2\right)} : \frac{2a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-2c^4}{2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}\right)\end{aligned}$$

ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} b^4 & a^2b^2-2c^4 & -b^2c^2\\ a^2b^2-2c^4 & a^4 & -a^2c^2\\ -b^2c^2 & -a^2c^2 & c^4\end{vmatrix} = -4c^{12} \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = -4c^4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) < 0.$ Además:

① Esta elipse corta a la recta $BC,$ cuya ecuación es $x=0,$ únicamente (por lo que es tangente a dicha recta) en el pie $X' = (0 : c^2 : a^2)$ de la ceviana correspondiente al vértice A del triángulo ABC del conjugado isotómico $\Omega_1^\bullet = (b^2 : c^2 : a^2)$ del primer punto de Brocard $\Omega_1 = \left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}\right)$ de dicho triángulo. Para construir este punto, basta con construir el punto Ω_1 y trazar su ceviana correspondiente al vértice $A,$ que corta a la recta BC en el punto $X = (0 : a^2 : c^2)$ simétrico del punto X' con respecto al punto medio $L = (0:1:1)$ del segmento $BC.$

② Esta elipse corta a la recta $CA,$ cuya ecuación es $y=0,$ únicamente (por lo que es tangente a dicha recta) en el pie $Y' = (c^2 : 0 : b^2)$ de la ceviana correspondiente al vértice B del triángulo ABC del conjugado isotómico $\Omega_2^\bullet = (c^2 : a^2 : b^2)$ del segundo punto de Brocard $\Omega_2 = \left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2}\right)$ de dicho triángulo. Para construir este punto, basta con construir el punto Ω_2 y trazar su ceviana correspondiente al vértice $B,$ que corta a la recta CA en el punto $Y = (b^2 : 0 : c^2)$ simétrico del punto Y' con respecto al punto medio $M = (1:0:1)$ del segmento $CA.$

③ Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice C del triángulo $ABC,$ cuya ecuación es $x-y=0,$ en los puntos:

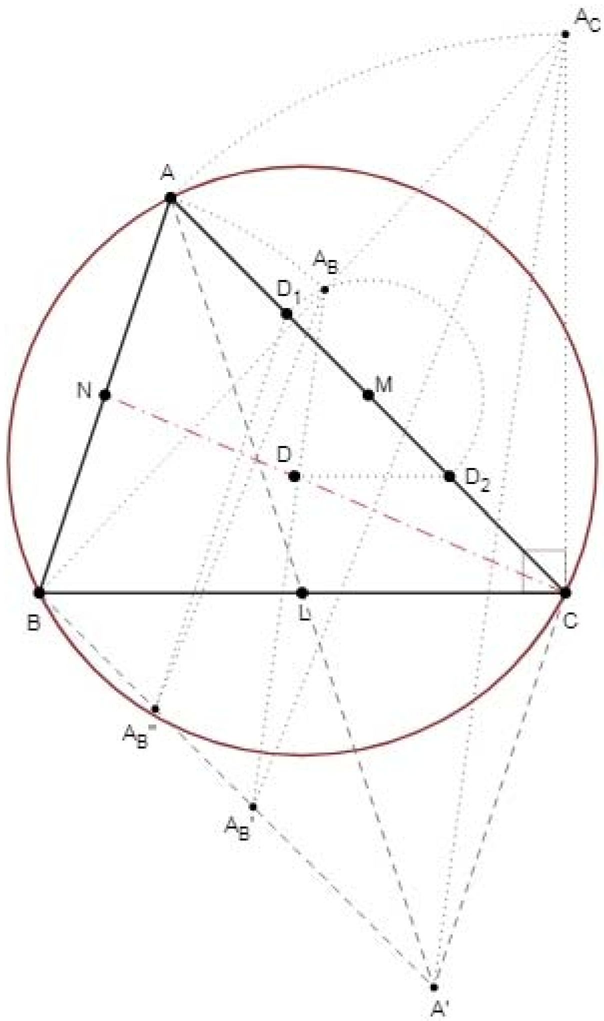
$$\begin{cases} D = (c^2 : c^2 : a^2+b^2-2c^2) = \left(\frac{c^2}{a^2+b^2} : \frac{c^2}{a^2+b^2} : 1-\frac{2c^2}{a^2+b^2}\right)\\ E = (c^2 : c^2 : a^2+b^2+2c^2) = \left(\frac{c^2}{a^2+b^2+4c^2} : \frac{c^2}{a^2+b^2+4c^2} : 1-\frac{2c^2}{a^2+b^2+4c^2}\right)\end{cases}$$

siendo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{CD} = \frac{c^2}{a^2+b^2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\\ \overrightarrow{CE} = \frac{c^2}{a^2+b^2+4c^2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)\end{cases}$$

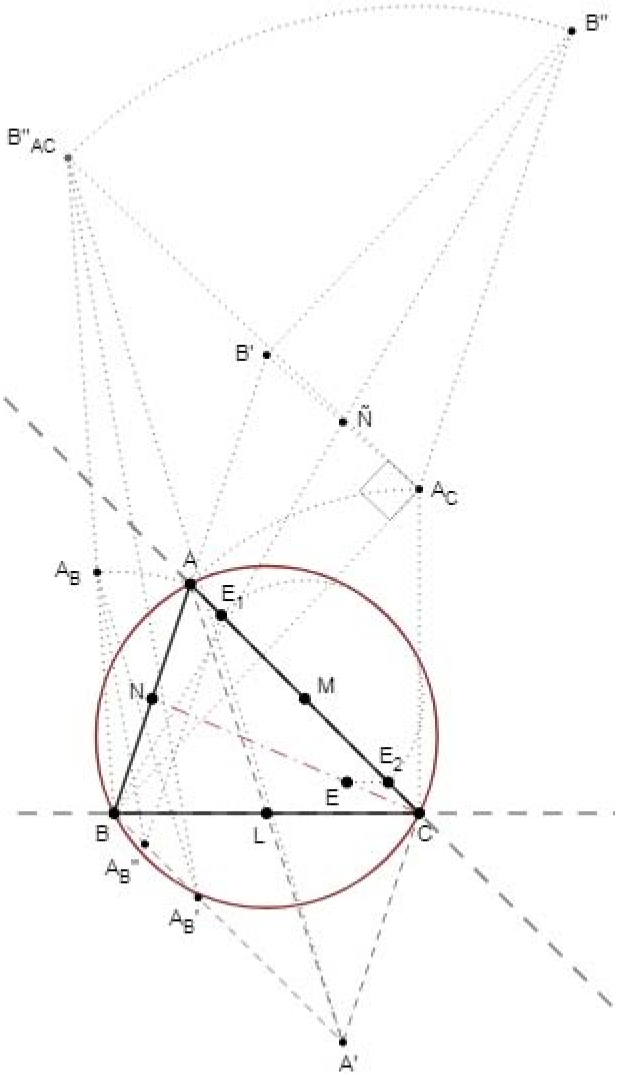
☺ Como $CA_C = b$, entonces, $BA_C = \sqrt{a^2+b^2}$. Además, como $BA_B = c$ y $BA' = b$, resulta que $BA_B' = \frac{cb}{\sqrt{a^2+b^2}}$, por lo que, de igual forma:

$$CD_2 = AD_1 = BA_B'' = \frac{c^2 b}{a^2+b^2}$$



☹ Como $CA_C = b$, entonces, $BA_C = \sqrt{a^2 + b^2}$. Además, como $A_C B''_{AC} = BB' = 2c$, entonces, $BB''_{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}$ y, como $BA_B = c$, resulta que $A_B A'_B = \dfrac{cb}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2}}$, por lo que, de igual forma:

$$CE_2 = AE_1 = BA''_B = \frac{c^2 b}{a^2 + b^2 + 4c^2}$$



④ Como:

$$\overrightarrow{CW} = \left[\frac{a^2 + c^2}{2\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + a^2 + b^2 \right)} \right] \overrightarrow{CA} + \left[\frac{b^2 + c^2}{2\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + a^2 + b^2 \right)} \right] \overrightarrow{CB}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

vamos a considerar dos puntos W_a y W_b situados en las rectas BC y CA, respectivamente, tales que:

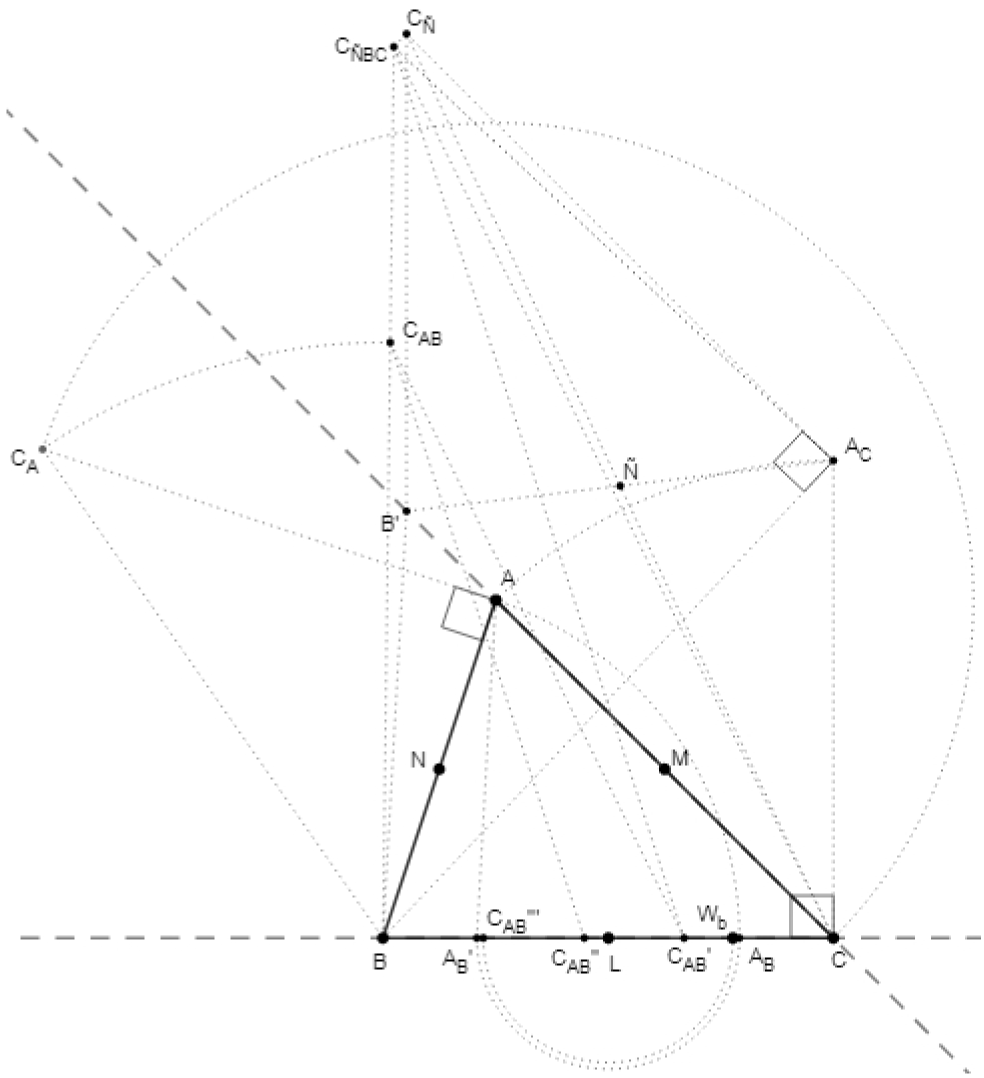
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{CW_a} = \left[\dfrac{a^2+c^2}{2\left(\dfrac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2\right)}\right]\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CW_b} = \left[\dfrac{b^2+c^2}{2\left(\dfrac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2\right)}\right]\overrightarrow{CB} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{CW} = \overrightarrow{CW_a} + \overrightarrow{CW_b}$$

☺ Como $CA_C = b$, entonces, $BA_C = \sqrt{a^2+b^2}$. Además, como $CA_B^{'} = BA_B = c$, entonces:

$$B_C C_{\tilde{N}BC} = B_C C_{\tilde{N}} = CB' = \left(\frac{a}{c}\right)b = \frac{ab}{c}$$

por lo que $BC_{\tilde{N}BC} = \sqrt{\dfrac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2}$ y, como $AC_A = b$, resulta que $BC_A = BC_{AB} = \sqrt{b^2+c^2}$,

luego $BC_{AB}^{'} = \left(\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2}}\right)a$ y, por tanto $BA_B^{'''} = \dfrac{BA_B^{''}}{2} = \left[\dfrac{b^2+c^2}{2\left(\dfrac{a^2b^2}{c^2}+a^2+b^2\right)}\right]a = CW_b$.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

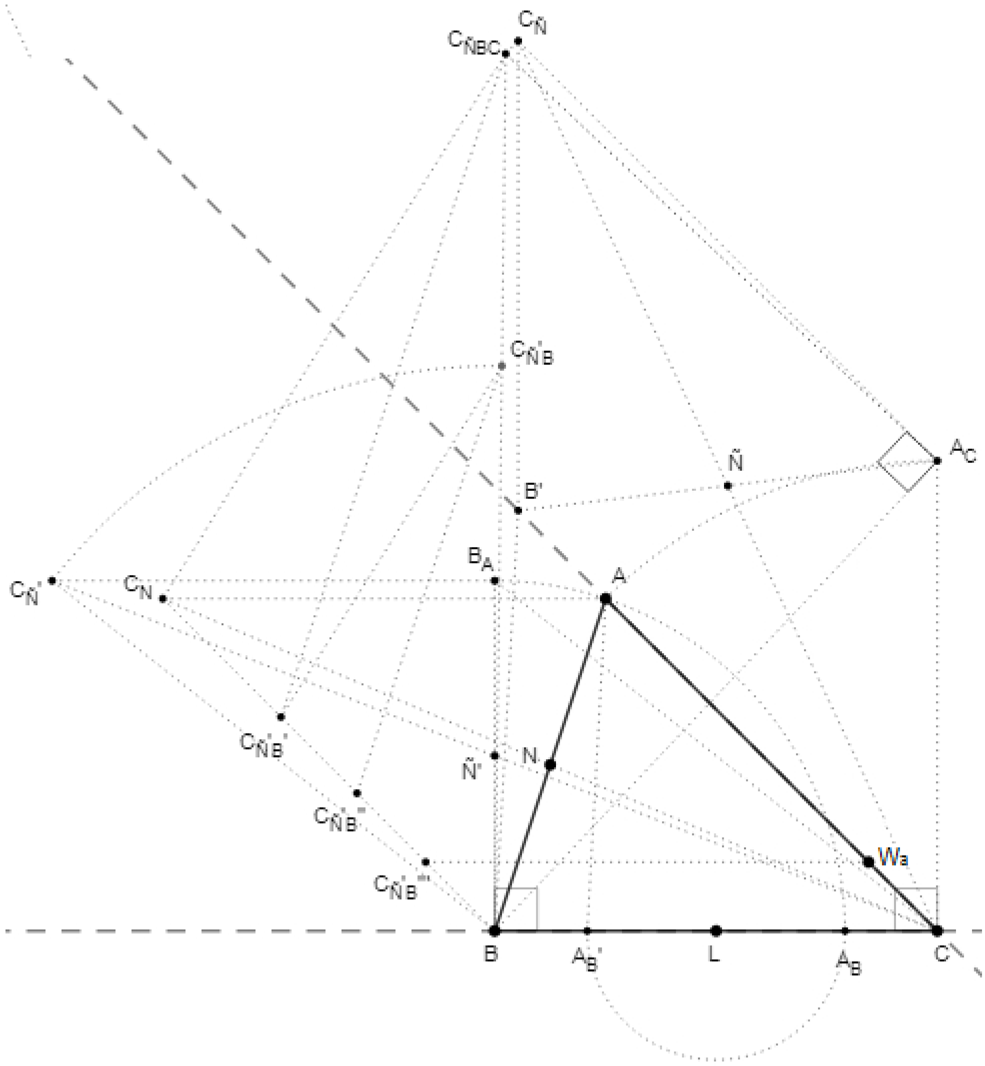
TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de mayo de 2022

☹ Como $CA_C = b$, entonces, $BA_C = \sqrt{a^2+b^2}$. Además, como $CA'_B = BA_B = c$, entonces:

$$B_C C_{\tilde{N}BC} = B_C C_{\tilde{N}} = CB' = \left(\frac{a}{c}\right)b = \frac{ab}{c}$$

por lo que $BC_{\tilde{N}BC} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} + a^2 + b^2}$ y, como $BB_A = c$, resulta que $BC'_{\tilde{N}B} = BC'_{\tilde{N}} = CB_A = \sqrt{a^2+c^2}$, luego $BC'_{\tilde{N}'AB} = \left(\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} + a^2 + b^2}}\right)b$ y, por tanto

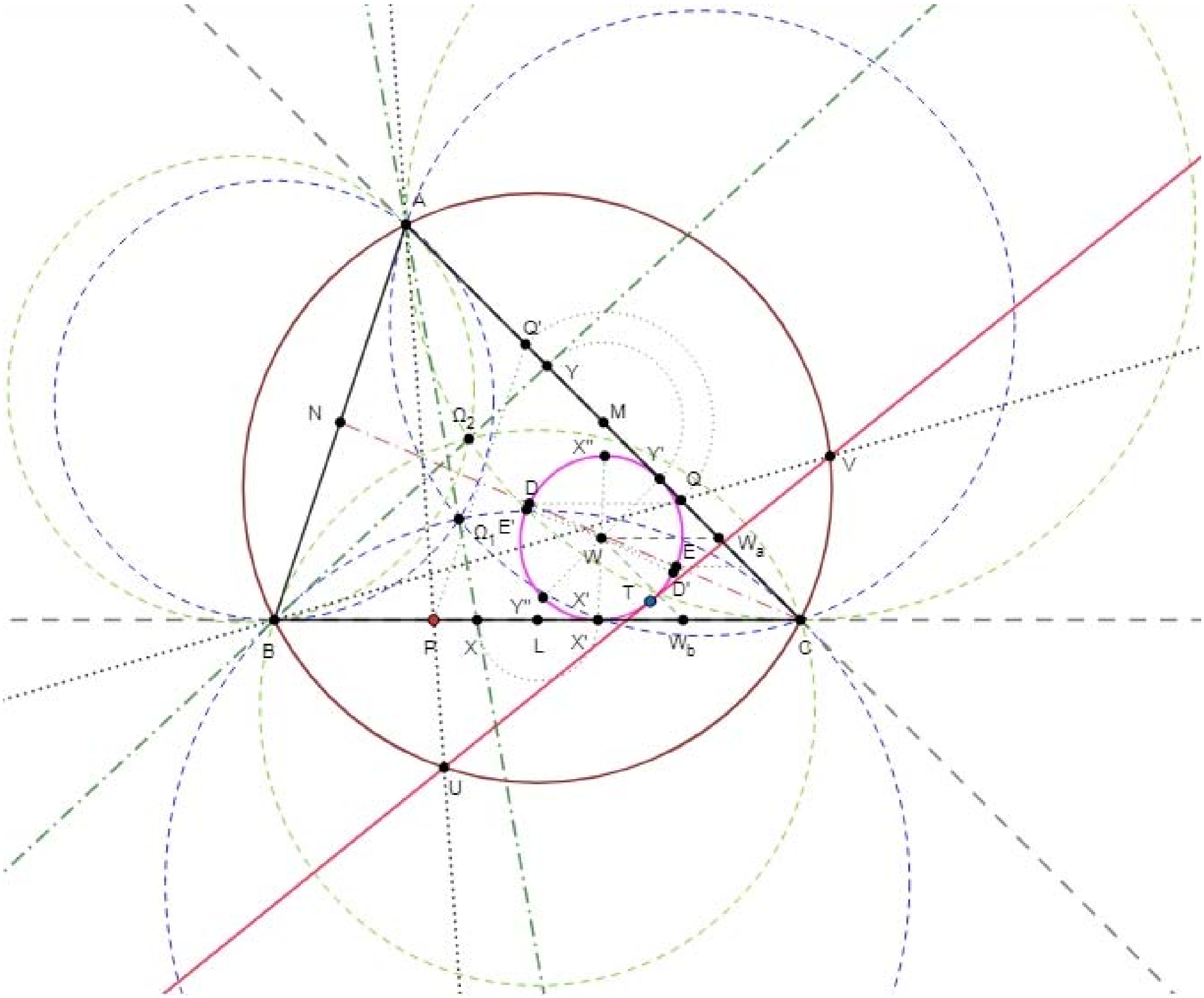
$$BC'''_{\tilde{N}'AB} = \frac{BC''_{\tilde{N}'AB}}{2} = \left[\frac{a^2+c^2}{2\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + a^2 + b^2\right)}\right]b = CW_a.$$



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
1 al 15 de mayo de 2022

⑤ Esta elipse pasa por los puntos *X''*, *Y''*, *D'* y *E'* simétricos de los puntos *X*, *Y*, *D* y *E*, respectivamente, respecto del punto *W*.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega