

Pr. Cabri I052

Enunciado

Sea ABC un triángulo isósceles ($AB=AC \neq BC$).

Consideremos la circunferencia inscrita mixtilínea tangente en E a AC, en D a la circunferencia circunscrita a ABC y en F a AB.

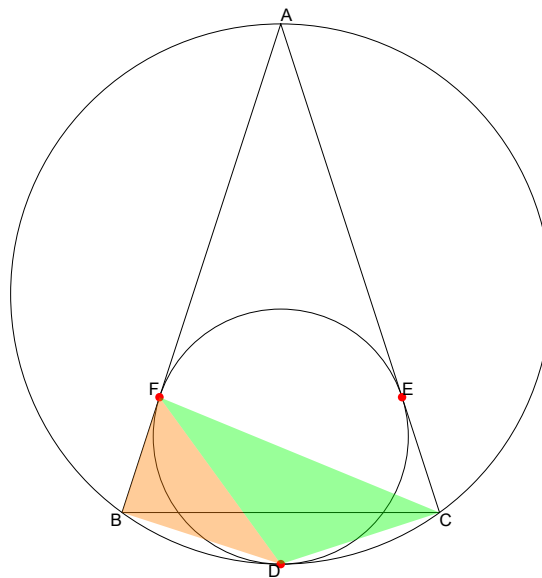
Probar que ABC es triángulo de oro $\Leftrightarrow (1/AB)+(1/BC)= 2/AF \Leftrightarrow [CFD]/[BDF]=\Phi$

Propuesto por Juan José Isach Mayo, España.

Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo $A(0,b)$, $B(-1,0)$ y $C(1,0)$, Su circuncírculo es $\alpha((0, \frac{2b^2-2}{4b}), \frac{1+b^2}{2b})$. La circunferencia del problema es una de las circunferencias de Apolonio tangentes a las rectas AB y AC y a la circunferencia α . Dicha circunferencia es $\omega((0, \frac{-1-2b^2+(1+b^2)^{3/2}}{b^3}), \frac{1+b^2-(1+b^2)^{3/2}}{b^3})$.



Los puntos de tangencia de ω con AB, AC y α son $F(-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}}, \frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{b})$,

$E(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}}, \frac{-1+\sqrt{1+b^2}}{b})$ y $D(0, -\frac{1}{b})$.

El triángulo ABC es áureo si $b=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Resolviendo la ecuación $(1/AB)+(1/BC)= 2/AF \Leftrightarrow \frac{2}{1+b^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$ obtenemos el citado valor de b.

Y lo mismo sucede con la otra ecuación $[CFD]/[BDF]=\Phi \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$.