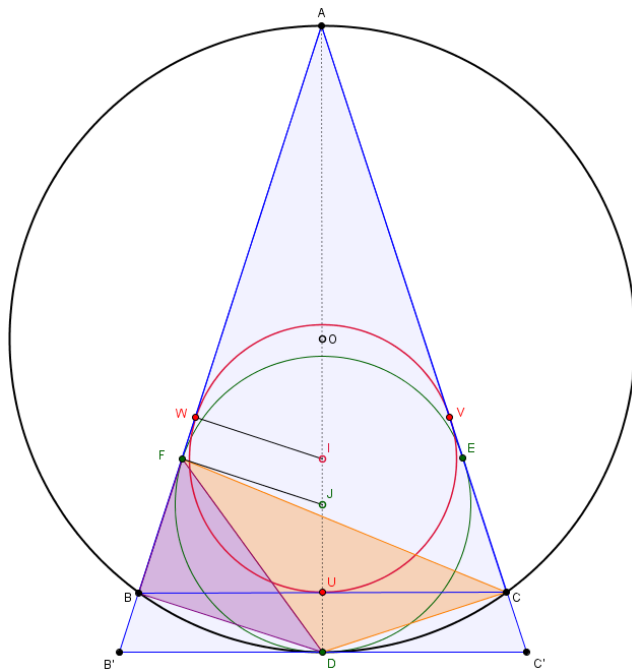


Problema 1052.

Propuesto por Juan José Isach Mayo, España.



★ $\triangle ABC$ isosceles .($AB = AC \neq BC$)

★ I, J incenter and A- mixtilinear incenter of $\triangle ABC$

★ U, V, W touch points

★ D, E, F mixtilinear touch points

Prove that:

$$\triangle ABC \text{ is a golden triangle} \Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{AF} \Leftrightarrow \frac{[C, F, D]}{[B, D, F]} = \phi$$

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros (Córdoba).

Sean las notaciones habituales, $a = BC, b = CA, c = AB$.

Una vez realizadas las construcciones pertinentes observamos la semejanza de triángulos $\triangle ABC \cong \triangle AB'C'$. Por tanto, podemos establecer que $AB' = AC' = k \cdot AB$; $B'C' = k \cdot BC$.

$$\text{Al verificarse que } AF = k \cdot AW = k \cdot (s - BC) = k \cdot \left(\frac{AB + AC + BC}{2} - BC \right) = k \cdot \frac{AB + AC - BC}{2},$$

Determinaremos a continuación el valor de k. Para ello, basta observar que $AD = k \cdot AU \rightarrow 2R = k \cdot h_a$

$$\text{Como quiera que } 2R = \frac{a}{\sin A}; h_a = c \cdot \cos \frac{A}{2} \rightarrow$$

$$k = \frac{2R}{h_a} = \frac{a}{c \cdot \sin A \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{a}{2c \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}$$

La relación $\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{AF}$ se expresará del modo:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{k \cdot \frac{AB + AC - BC}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{4}{k \cdot (2c - a)} \rightarrow k = \frac{4ac}{ac + 2c^2 - a^2}$$

($\Rightarrow$) Si el ΔABC es el sublime, podemos suponer que $b = c = 1, a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Así de este modo, $k = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos^2 18^\circ} = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}$. Probaremos que entonces se verifica $k = \frac{4ac}{ac+2c^2-a^2} = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}$

Para ello,

$$\frac{4ac}{ac+2c^2-a^2} = \frac{2(-1+\sqrt{5})}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{2(-1+\sqrt{5})}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \frac{10-2\sqrt{5}}{5} = k$$

($\Leftarrow$) Si se verifica la relación $\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{AF} \rightarrow k = \frac{4ac}{ac+2c^2-a^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}}$

Si suponemos que $b = c = 1$, entonces:

$$k = \frac{4a}{a+2-a^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{1-\frac{a^2}{4}} \rightarrow \frac{4a}{a+2-a^2} = \frac{4}{4-a^2} \rightarrow \frac{4a}{(2-a)(a+1)} = \frac{4}{(2-a)(2+a)}$$

$\frac{a}{a+1} = \frac{1}{2+a} \rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Por tanto, el ΔABC es el sublime.

($\Rightarrow$) Si el ΔABC es el sublime, podemos suponer que $b = c = 1, a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$[CFD] = \frac{1}{2} CD \cdot DF \cdot \sin(180^\circ - A - \alpha) = \frac{1}{2} CD \cdot DF \cdot \sin(A + \alpha)$$

$$[BFD] = \frac{1}{2} BD \cdot DF \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} CD \cdot DF \cdot \sin \alpha$$

Por tanto,

$$\frac{[CFD]}{[BFD]} = \frac{\sin(A + \alpha)}{\sin \alpha}$$

El $\Delta B'DF$ es isósceles ya que $BF' = BD$. Como además, $\angle BDB' = \frac{A}{2}$, entonces:

$$\angle BDF = \alpha = 45^\circ - \frac{A}{4} = 36^\circ; A + \alpha = 72^\circ \rightarrow \frac{[CFD]}{[BFD]} = \frac{\sin(A + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cdot \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

($\Leftarrow$) Sea ahora que se verifica $\phi = \frac{[CFD]}{[BFD]} = \frac{\sin(A + \alpha)}{\sin \alpha}$

Como quiera que:

$$\alpha = 45^\circ - \frac{A}{4} \rightarrow \phi = \frac{\sin(A + \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin\left(\frac{3A}{4} + 45^\circ\right)}{\sin\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)} = \frac{\sin \frac{3A}{4} + \cos \frac{3A}{4}}{-\sin \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{4}} = \frac{\left(\sin \frac{3A}{4} + \cos \frac{3A}{4}\right)\left(\sin \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{4}\right)}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$\phi = \frac{\left(\underbrace{\sin \frac{3A}{4} \cdot \sin \frac{A}{4} + \cos \frac{3A}{4} \cdot \cos \frac{A}{4}}_{\cos \frac{A}{2}} + \underbrace{\sin \frac{3A}{4} \cdot \cos \frac{A}{4} + \cos \frac{3A}{4} \cdot \sin \frac{A}{4}}_{\sin A}\right)}{\cos \frac{A}{2}} = 1 + 2 \sin \frac{A}{2} \rightarrow$$

$\sin \frac{A}{2} = \frac{\phi-1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{A}{2} = 18^\circ \rightarrow A = 36^\circ; B = C = 72^\circ \rightarrow \Delta ABC \text{ es sublime.}$