

Quincena del 1 al 15 de mayo de 2022.

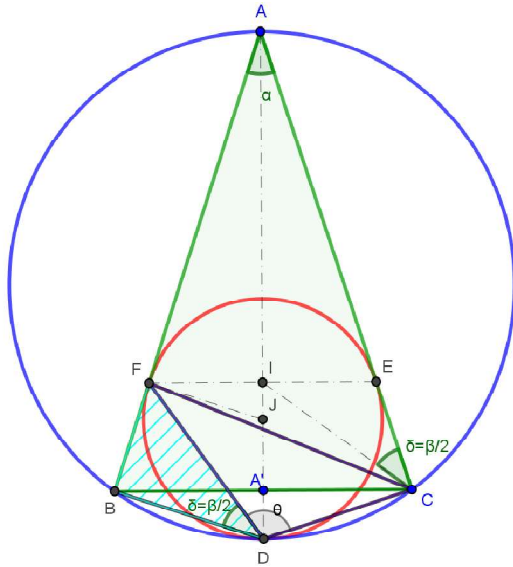
Propuesto por Juan José Isach Mayo, España.

Problema 1052.- Sea ABC un triángulo isósceles ($AB = AC \neq BC$). I y J son los incentros de ABC y la A -circunferencia mixtilínea inscrita en ABC . Los puntos de contacto de esta circunferencia son D con la circunscrita; E con el lado AC y F con el lado AB respectivamente.

Demostrar que $\triangle ABC$ es un triángulo de oro $\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{AF} \Leftrightarrow \frac{[CFD]}{[BDF]} = \varphi$ (el número de oro).

Isach, J.J. (2022): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



El triángulo de oro es un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual es de 36° , o bien cuyos lados son proporcionales a $1, \varphi, \varphi$ respectivamente.

Sabemos por el problema 690 que $AF = \frac{bc}{s}$ ($s = b + \frac{a}{2}$ es aquí el semiperímetro) y por el 702 que la perpendicular a la bisectriz de A por el incentro corta a los lados AB y AC en los puntos de contacto F, E de la A -circunferencia mixtilínea inscrita. Con estos datos se construye de inmediato esta circunferencia.

1) ABC es un triángulo de oro $\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2}{AF}$

La condición del segundo miembro es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+2b}{b^2}.$$

Operando resulta $b^2 + ab = a(a + 2b) \Leftrightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$.

Resolviendo en b se obtiene la solución positiva $b = a\varphi$. Se trata pues del triángulo de oro.

2) ABC es un triángulo de oro $\Leftrightarrow \frac{[CFD]}{[BDF]} = \varphi$

-Observemos primeramente que F es el pie de la bisectriz del ángulo $\sphericalangle ADB = \beta$.

$$\frac{BD}{AD} = \sin \frac{A}{2} = \frac{a/2}{b} = \frac{ab/(2s)}{b^2/s} = \frac{b - b^2/s}{b^2/s} = \frac{BF}{AF}$$

Tenemos por tanto $\delta = \sphericalangle BDF = \beta/2$ y $\theta = \sphericalangle FDC = 2\beta - \frac{\beta}{2} = \beta + \frac{\beta}{2}$

-De la figura se deduce ($BD = DC$ y DF común) que la razón de las áreas de los triángulos CFD y BDF es igual a la razón de los senos de los ángulos en el vértice común D , esto es:

$$\frac{\sin \theta}{\sin \delta} = \frac{\sin \left(\beta + \frac{\beta}{2} \right)}{\sin \frac{\beta}{2}} = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos \beta = 1 + 2 \cos \beta = 1 + \frac{a}{b}$$

$$\frac{[CFD]}{[DFB]} = 1 + \frac{a}{b}$$

b) Si el triángulo es de oro $b = a\varphi$, y el cociente de las áreas es $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, como queríamos demostrar.

Recíprocamente, de $\frac{a}{b} + 1 = \varphi$ se obtiene $b = \frac{a}{\varphi - 1} = a\varphi$ y el triángulo es de oro. ■