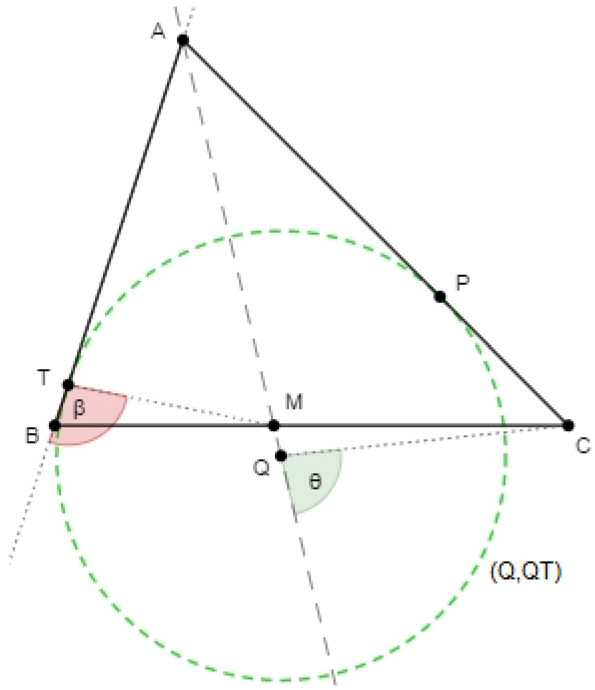
TRIÁNGULOS CABRI
16 al 31 de mayo de 2022

<u>Ejercicio 1053.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, se considera el punto M de intersección entre la bisectriz interior correspondiente al vértice A y la recta BC. Construir un punto Q sobre la recta AM tal que $\beta+\theta=\pi$, siendo β y θ los ángulos que se muestran en la siguiente figura, en la que T y P son las proyecciones ortogonales del punto Q sobre las rectas AB y AC, respectivamente.



(Triángulos Cabri nº 1053)

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $M=\left(0:\dfrac{b}{b+c}:\dfrac{c}{b+c}\right)$, si:

$$Q=(1-t)M+tA=((b+c)t:b(1-t):c(1-t))\ \left(0\neq t\neq\frac{c-b}{2c}\right)$$

entonces, su proyección ortogonal sobre la recta AB es:

$$T=(2[S_B(1-t)+bct]:(-a+b+c)(a+b+c)(1-t):0)$$

por lo que:

$$\begin{cases} TM\equiv 0=c(-a+b+c)(a+b+c)(1-t)x-2c[S_B(1-t)+bct]y+2b[S_B(1-t)+bct]z \\ AM\equiv 0=cy-bz \\ QC\equiv 0=b(1-t)x-(b+c)ty \end{cases}$$

y, por tanto:

$$S\cot\beta=\frac{AB_\infty\cdot TM_\infty}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ c(-a+b+c)(a+b+c)(1-t) & -2c[S_B(1-t)+bct] & 2b[S_B(1-t)+bct] \end{vmatrix}}=\frac{(-a+b+c)(a+b+c)t}{2}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI
16 al 31 de mayo de 2022

$$S\cot\theta = \frac{AM_\infty \cdot QC_\infty}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c & -b \\ b(1-t) & -(b+c)t & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-a+b+c)(a+b+c)(b-c+2ct)}{2(b+c)}$$

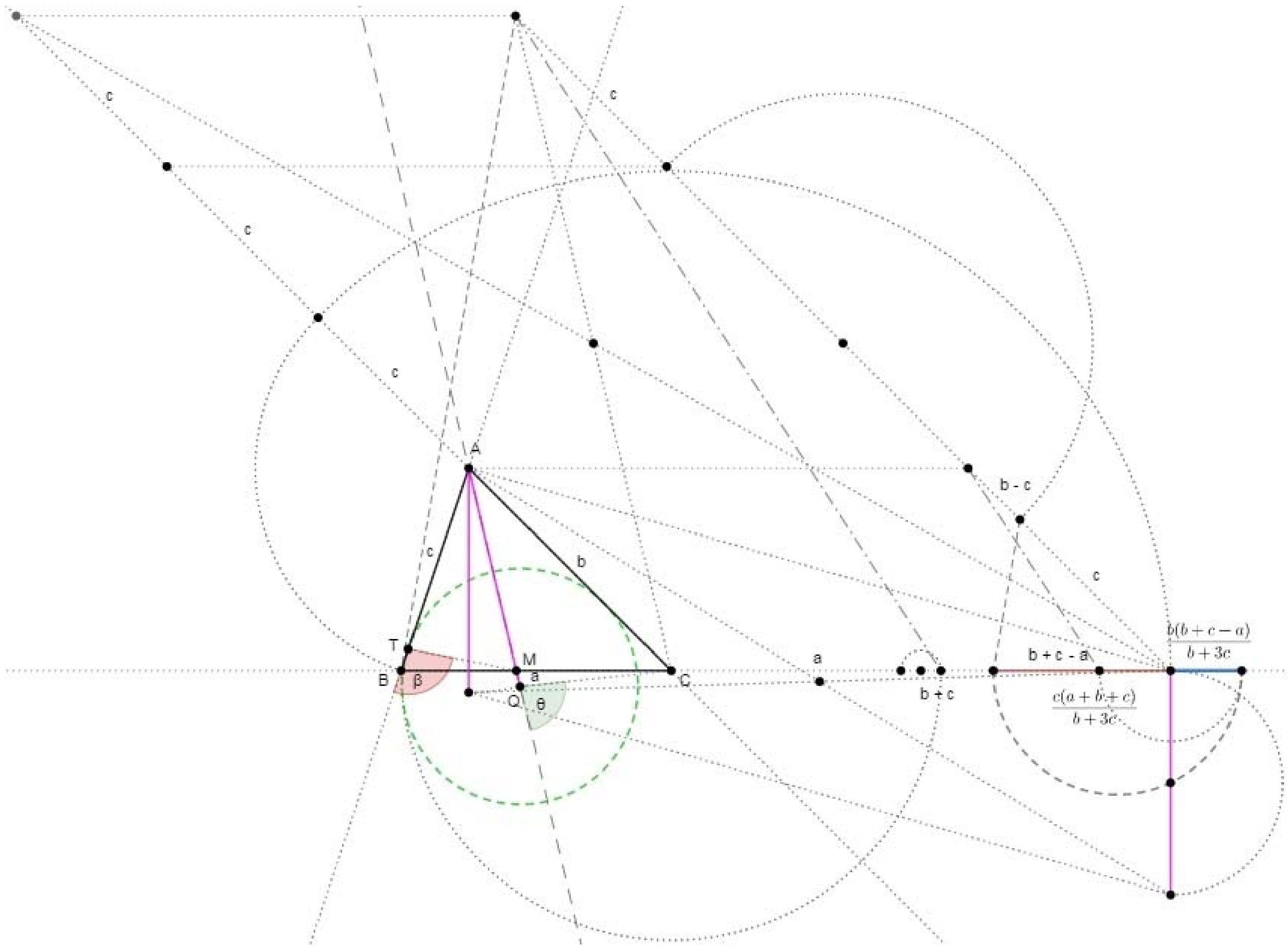
Además, si $\beta+\theta=\pi$, resulta que $\cot\theta=-\cot\beta$, por lo que:

$$0=\frac{\cot\beta}{\cot\theta}+1=\frac{b-c+(b+3c)t}{b-c+2ct} \Rightarrow t=\frac{c-b}{b+3c} \Rightarrow Q=(c-b:2b:2c)$$

siendo:

$$AQ^2=\frac{4bc(-a+b+c)(a+b+c)}{(b+3c)^2}=4\left[\frac{b(-a+b+c)}{b+3c}\right]\left[\frac{c(a+b+c)}{b+3c}\right]$$

y, por tanto, la distancia AQ es el doble de la media geométrica entre las distancias $\frac{b(-a+b+c)}{b+3c}$ y $\frac{c(a+b+c)}{b+3c}$, fáciles de construir utilizando el Teorema de Thales.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega