

## D140 Un vrai feu d'artifices [\*\*\*\* à la main]

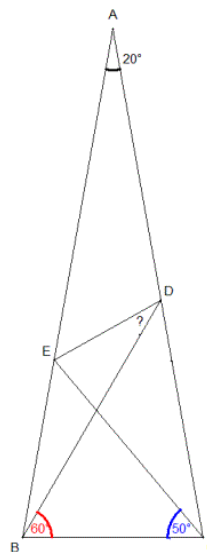
Ce problème est une extension du problème D120 – Un triangle isocèle très richement doté –

Le triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut  $20^\circ$  donne l'occasion de réaliser un vrai feu d'artifices si l'on regarde toutes les configurations possibles remarquables qu'on obtient en lançant seulement quelques fusées, c'est à dire en traçant quelques lignes.

### Question n°1

On part de la figure ci-contre :

Le triangle ABC est isocèle de sommet A avec  $\angle BAC = 20^\circ$ .  
On trace le point D sur le côté AC tel que  $\angle CBD = 60^\circ$  et le point E sur le côté AB tel que  $\angle BCE = 50^\circ$ . Il s'agit de trouver l'angle  $\angle BDE$ .  
Indépendamment de la solution trigonométrique, donner au moins trois solutions géométriques différentes.



### Question n°2

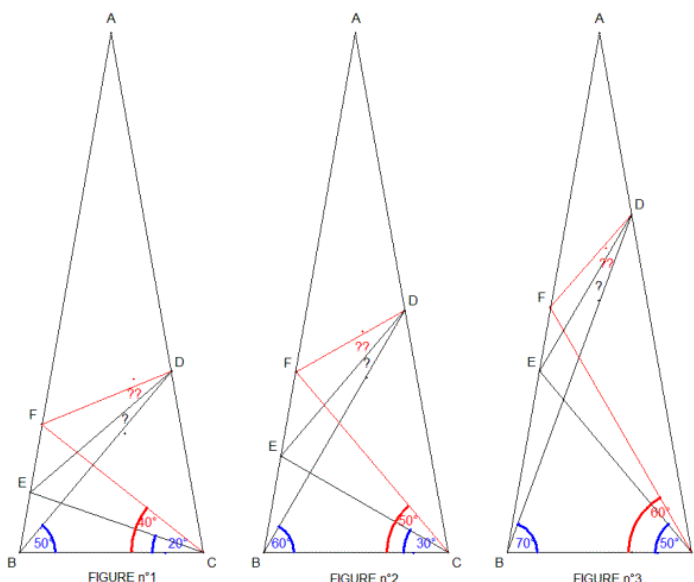
Toujours avec le même triangle isocèle ABC de sommet A et d'angle au sommet  $\angle BAC = 20^\circ$ , on considère les trois figures ci-contre :

-dans la figure n°1, le point D sur AC et les points E et F sur AB sont tels que  $\angle CBD = 50^\circ$ ,  $\angle BCE = 20^\circ$  et  $\angle CFD = 40^\circ$ .

-dans la figure n°2,  $\angle CBD = 60^\circ$ ,  $\angle BCE = 30^\circ$  et  $\angle CFD = 50^\circ$ .

-dans la figure n°3,  $\angle CBD = 70^\circ$ ,  $\angle BCE = 50^\circ$  et  $\angle BCF = 60^\circ$ .

Comparer d'une part les angles  $\angle BDE$  des trois figures et d'autre part les angles  $\angle EDF$  des figures n°1 et n°2 entre eux et à l'angle  $\angle BDF$  de la figure n°1.



### Question n°3

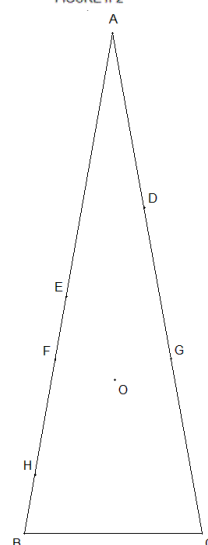
Dans la figure ci-contre, on considère les points D et G d'une part, E, F, H d'autre part respectivement situés sur les côtés AC et AB du triangle isocèle ABC tels que :

- $\angle CBD = 70^\circ$
- $\angle BCE = 60^\circ$
- $\angle BCF = 50^\circ$
- $\angle CBG = 50^\circ$
- $\angle BCH = 20^\circ$

Par ailleurs, on trace le point O à l'intersection de CE et de la médiatrice de BC. On pose  $BC = 1$ .

3-1) Trouver tous les segments qui ont pour extrémités un couple de points choisis exclusivement parmi  $\{A, B, C, D, E, F, G, H, O\}$  et qui sont tous de longueur unité.

3-2) Démontrer que  $DE = EG = OH$  et  $BH = OF = OG = EF$ .



## Solution

### Question n°1

#### Solution trigonométrique

Soit  $x = \angle BDE$  l'angle à déterminer.

Comme  $\angle BEC = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ$ , le triangle BCE est isocèle de sommet B et l'on a  $BE = BC$ .

La loi des sinus appliquée respectivement dans les triangles BED et BCD permet d'écrire :

$$\frac{\sin(160^\circ - x)}{\sin(x)} = \frac{BD}{BE} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin(80^\circ)}{\sin(40^\circ)}$$

Il en résulte :  $\sin(160^\circ - x) \cdot \sin(40^\circ) = \sin(80^\circ) \cdot \sin(x)$

Comme  $\sin(180^\circ - a) = \sin(a)$  on a :  $\sin(160^\circ - x) = \sin(x + 20^\circ)$ .

Par ailleurs  $\sin(80^\circ) = 2 \cdot \sin(40^\circ) \cdot \cos(40^\circ)$ .

D'où  $\sin(x + 20^\circ) = 2 \cos(40^\circ) \cdot \sin(x)$

Comme  $\sin(a) \cdot \cos(b) = [\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2$  (1),

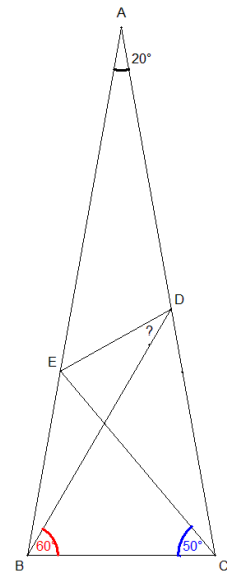
on a  $2 \cdot \cos(40^\circ) \cdot \sin(x) = \sin(x + 40^\circ) + \sin(x - 40^\circ)$ .

D'où  $\sin(x + 20^\circ) - \sin(x - 40^\circ) = \sin(x + 40^\circ)$ .

Or toujours d'après (1), on a  $\sin(x + 20^\circ) - \sin(x - 40^\circ) = 2 \cdot \cos(x - 10^\circ) \cdot \sin(30^\circ)$ .

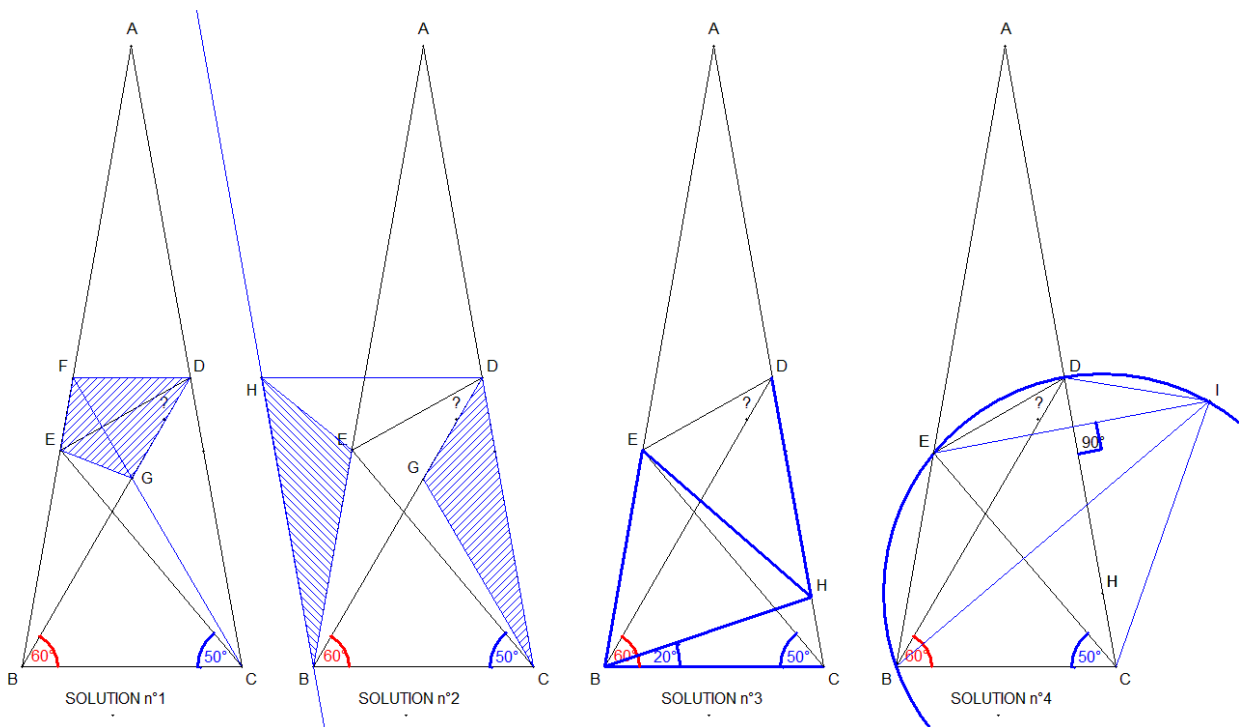
Comme  $\sin(30^\circ) = 1/2$  et que  $\sin(a) = \cos(90^\circ - a)$ , on obtient  $\cos(x - 10^\circ) = \sin(x + 80^\circ) = \sin(x + 40^\circ) = \sin(140^\circ - x)$ .

La solution unique est alors  $x = \angle BDE = 30^\circ$ .



#### Solutions géométriques

On n'en compte pas moins de huit différentes les unes des autres, certaines ayant toutefois entre elles un air évident de parenté :



#### Solution n°1

On mène DF parallèle à BC. La droite CF coupe BD en G. Le triangle BCG est équilatéral ainsi que le triangle DFG.

Le triangle BCE est isocèle de sommet B (voir plus haut la solution trigonométrique). On a donc  $BE = BC$ . Comme  $BC = BG$ , on en déduit que le triangle BEG est isocèle de sommet B et  $\angle BEG = 80^\circ$ . Il en résulte que  $\angle EGF = 80^\circ - \angle EFG = 80^\circ - (180^\circ - 80^\circ - 60^\circ) = 40^\circ = \angle EFG$ . Le triangle EFG est isocèle de sommet E. D'où  $\angle BDE = 180^\circ - \angle EGD - \angle DEG = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) - 100^\circ/2 = 30^\circ$

### Solution n°2

On mène par B la parallèle au côté AC qui rencontre la parallèle issue de D à BC au point H. Soit G le sommet du triangle équilatéral dont la base est le côté BC. Les deux triangles CDG et BHE sont égaux car ils ont le même angle  $\angle DCG = \angle EBH = 20^\circ$  compris entre des côtés égaux :  $BE = BC = CG$  et  $BH = DC$  dans le parallélogramme BCDH. Il en résulte  $\angle BHE = \angle CDG = 40^\circ$ . D'où  $\angle DHE = \angle BHD - \angle BHE = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$ .

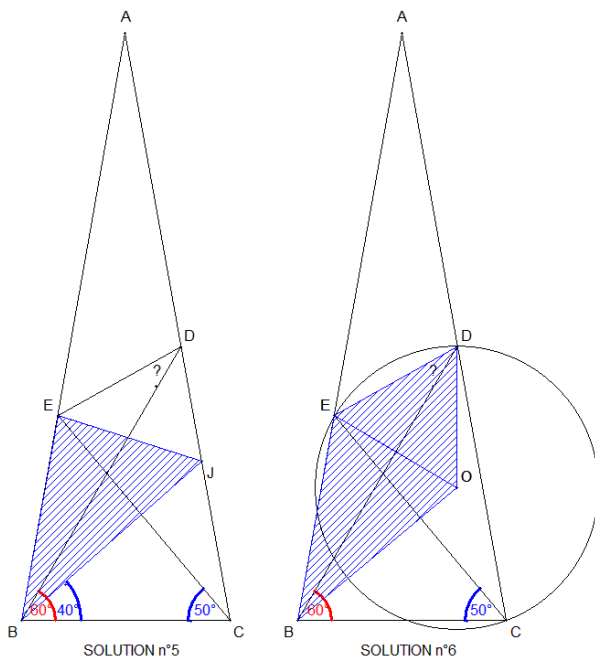
Comme  $\angle DBE = \angle EBH = 20^\circ$ , le point E est le centre du cercle inscrit au triangle BDH. DE est la bissectrice de  $\angle BDH$  et  $\angle BDE = (\angle CDH - \angle CDG)/2 = (100^\circ - 40^\circ)/2 = 30^\circ$ .

### Solution n°3

On trace le point H sur AC tel que  $\angle CBH = 20^\circ$ . Il apparaît que le triangle CBH est isocèle de sommet B. D'où  $BH = BC = BE$ . Le triangle BHE est donc isocèle et comme son angle au sommet B vaut  $80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ , il est équilatéral. Par ailleurs, le triangle HBD est isocèle de sommet H car les deux angles adjacents au côté BD valent  $\angle HBD = \angle HDB = 40^\circ$ . Il en résulte que  $HD = HB = HE$ . Le triangle HED est isocèle de sommet H et  $\angle DHE = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ . D'où  $\angle EDH = (180^\circ - 40^\circ)/2 = 70^\circ$  et  $\angle BDE = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$ .

### Solution n°4

Soit I le point symétrique de E par rapport à AC. Comme l'angle au sommet C vaut  $2 \cdot \angle DCE = 60^\circ$ , le triangle CEI est équilatéral. Le triangle BCE est isocèle de sommet B. Il en résulte que IB est bissectrice de  $\angle CIE$  et  $\angle BIE = 30^\circ$ . D'autre part  $\angle DBI = 60^\circ - \angle CBI = 20^\circ = \angle DBE$ . BD est donc bissectrice de  $\angle EBI$ . On considère le cercle circonscrit au triangle BEI. (on note au passage que son centre est le point H défini dans la solution n°3). Le point D à l'intersection de la bissectrice de  $\angle EBI$  duquel on voit l'arc de cercle EI et de la médiatrice de la corde EI qui sous-tend ce même arc. D appartient donc au cercle et  $\angle BDE = \angle BIE = 30^\circ$ .



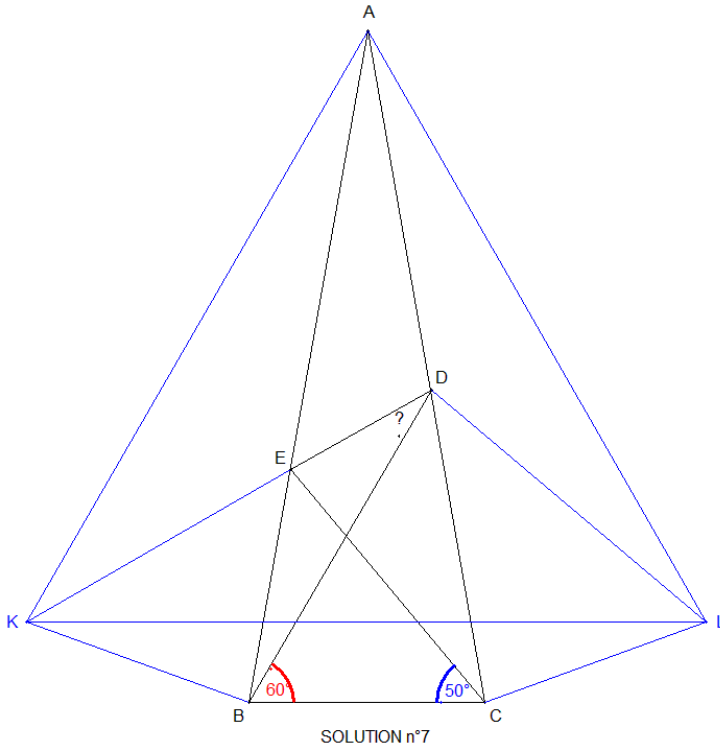
### Solution n°5

On trace la bissectrice de  $\angle ABC$  qui coupe AC au point J. Comme le triangle BCE est isocèle, BJ est médiatrice de CE et  $\angle BJE = \angle BJC = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ . On a par ailleurs  $\angle DBJ = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ = \angle DBE$ . Dès lors D est à l'intersection de la bissectrice de  $\angle EBJ$  et de l'angle supplémentaire de  $\angle BJE$ . C'est donc le centre de l'un des trois cercles exinscrits au triangle BEJ. Dès lors DE est la bissectrice de  $\angle AEJ$  et  $\angle BDE = 180^\circ - \angle DBE - \angle BDE = 180^\circ - 20^\circ - (\angle BEJ + \angle AEJ/2) = 160^\circ - 80^\circ - 100^\circ/2 = 30^\circ$ .

### Solution n°6

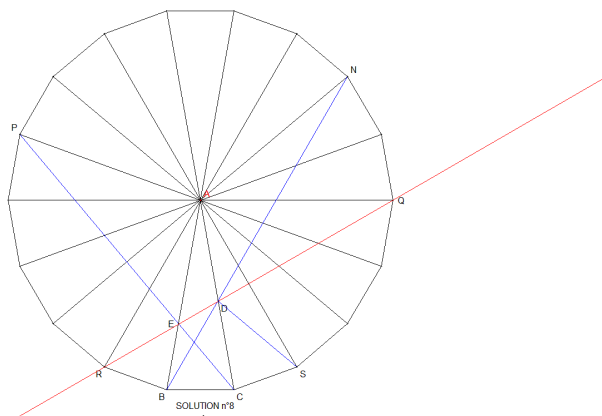
Soit le cercle de centre O circonscrit au triangle CDE. Comme  $\angle DCE = 30^\circ$ , l'angle au centre  $\angle DOE$  est égal à  $60^\circ$  et le triangle DOE est équilatéral. D est donc sur la médiatrice de EO. Par ailleurs BD est bissectrice de  $\angle EBO$  car  $\angle BDE = 20^\circ = \angle DBO = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$ . Si la médiatrice de EO était différente de BD, alors le point D serait sur le cercle circonscrit au triangle BEO et l'on aurait  $\angle EBO + \angle EDO = 180^\circ$ , ce qui n'est pas le cas. Donc BD est médiatrice de EO et  $\angle BDE = 60^\circ/2 = 30^\circ$ .

### Solution n°7



On trace les deux triangles ABK et ACL symétriques du triangle ABC respectivement par rapport aux côtés AB et AC. Le triangle AKL dont l'angle au sommet A vaut  $3 \times 20^\circ = 60^\circ$  est équilatéral. Il en résulte que  $\angle BKL = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ . Comme par construction  $\angle BKE = \angle BCE = 50^\circ$ , on a  $\angle EKL = \angle BKE - 20^\circ = 30^\circ$  et la droite EK est bissectrice de  $\angle AKL$ . Par ailleurs, le triangle DAL est isocèle de sommet D car les angles adjacents à la base AL  $\angle DAL$  et  $\angle DLA$  sont égaux l'un et l'autre à  $20^\circ$ . D est donc sur la médiatrice de AL et coïncide à l'intérieur du triangle équilatéral AKL avec la bissectrice de  $\angle AKL$  issue de K. D'où  $\angle BDE = 180^\circ - \angle BKD - \angle DBK = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 30^\circ$ .

### Solution n°8

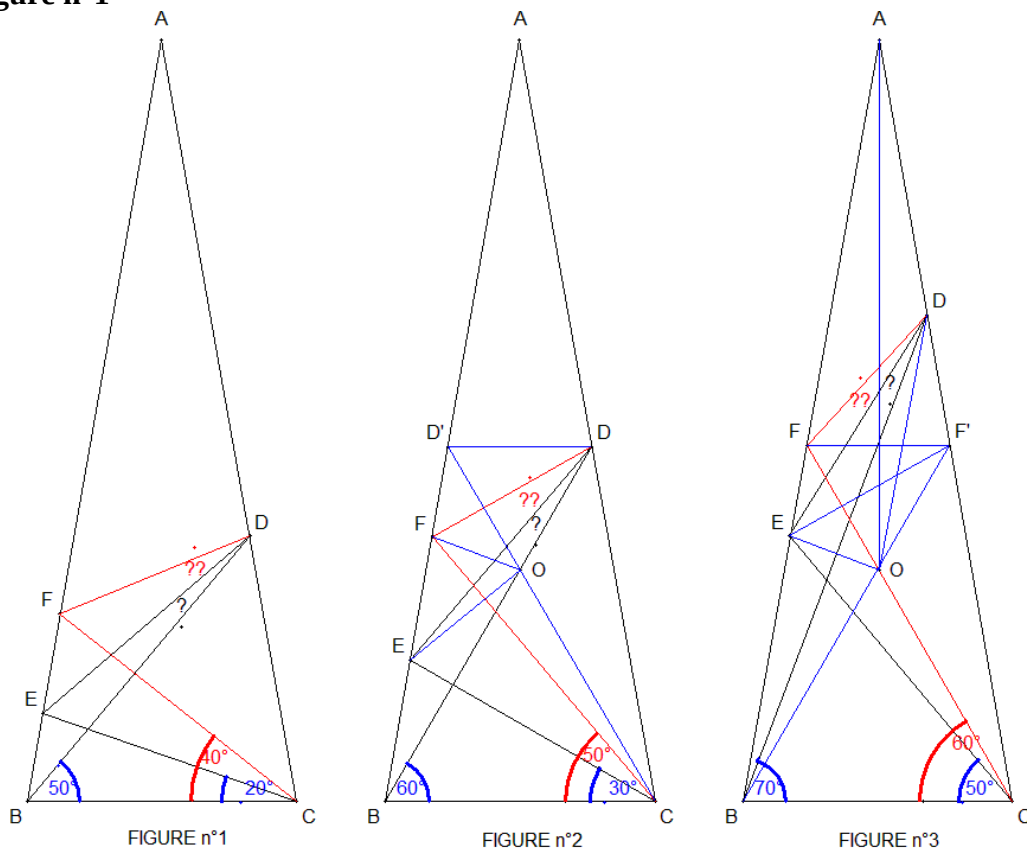


On considère le polygone régulier à 18 côtés de centre A et de rayon  $R = AB = AC$ . Le triangle isocèle ABC

est l'un des 18 « pétales » constitutifs de ce polygone avec l'angle au sommet A égal à  $360^\circ/18 = 20^\circ$ . On vérifie que la droite BD rejoint le sommet N du polygone tandis que la droite CE passe par le sommet P (voir figure ci-dessus). En effet l'arc CN correspond bien à  $60^\circ$  soit  $120^\circ$  pour l'angle au centre soit le 6<sup>ème</sup> sommet à partir de C dans le sens trigonométrique tandis que l'arc BP correspond à un angle de  $50^\circ$  soit  $100^\circ$  pour l'angle au centre soit le 5<sup>ème</sup> sommet à partir de B dans le sens des aiguilles d'une montre. Soient Q le 4<sup>ème</sup> sommet du polygone à partir de C dans le sens trigonométrique, R le sommet adjacent à B autre que C et S le sommet adjacent à C autre que B. La corde QR passe par D et E. En effet, QR est médiatrice de AS et passe par D qui est le sommet du triangle isocèle DAS (comme l'est DAB). Par ailleurs  $\angle QRB = 5 \cdot 20^\circ / 2 = 50^\circ = \angle ERB$ . QR passe donc bien par E.

## Question n°2

Figure n°1



Le triangle BCE est isocèle de sommet C. D'où  $CB = CE$ . Comme  $CB = CD$  et que  $\angle DCE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ , il en découle que le triangle CDE est équilatéral. D'où  $\angle CDE = 60^\circ$  et  $\angle BDE = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ .

Par ailleurs CF est bissectrice de  $\angle ACB$ . Comme  $CB = CD$ , les deux triangles CBF et CDF sont égaux. Il en résulte que  $\angle CDF = 80^\circ$  et  $\angle EDF = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ .

Figure n°2

Soit O le sommet du triangle équilatéral de base BC. La droite CO coupe AB en un point D' tel que  $AD = AD'$ . ODD' est également un triangle équilatéral. Comme  $\angle BCE = 30^\circ$ , CE est médiatrice de BO et les triangles BCE et OCE sont égaux. Il en résulte  $\angle CEO = 70^\circ$ . D'où  $\angle D'EO = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$  et le triangle OD'E est isocèle de sommet O avec  $\angle D'EO = \angle ED'O = 40^\circ$ . On a donc  $OE = OD' = OD$  et le triangle OED est isocèle. Comme  $\angle EOC = \angle EBC = 80^\circ$ , on a  $\angle BOE = 20^\circ = 2 \angle EDB$ . D'où  $\angle EDB = 10^\circ$ .

D'après la question n°1, on sait « abondamment » que  $\angle BDF = 30^\circ$ . Il en résulte que  $\angle EDF = 20^\circ$ .

Figure n°3

Comme dans la figure n°2, on trace le point O sommet du triangle équilatéral de base BC. BO coupe AC en F' sur AC tel qu' $AF' = AF$ . BD est bissectrice de  $\angle ABF = 20^\circ$  avec  $\angle ABD = \angle DBF = 10^\circ$ . Il en est de même de AO qui est bissectrice de  $\angle BAC = 20^\circ$ . Le quadrilatère ADOB est donc un trapèze isocèle tel que  $\angle BDO = \angle ABD = 10^\circ = \angle AOD = \angle BAO$ . Comme  $BE = BO$ , le triangle BEO est isocèle de sommet O, le

triangle OBD est aussi isocèle de sommet O. Le quadrilatère BEDO est alors un losange et l'on a  $\angle BDE = 10^\circ$ .

Les triangles ADF et BEF' sont égaux. En effet  $AD = BO = BC = BE$  (ADOB est un trapèze isocèle),  $BF' = CF = AF$  (FAC est isocèle de sommet F avec  $\angle FAC = \angle FCA = 20^\circ$ ),  $\angle DAF = \angle EBF = 20^\circ$ . D'où  $\angle AFD = \angle EF'O = \angle FF'O/2 = 30^\circ$ . D'où  $\angle FDF' = 180^\circ - 80^\circ - (80^\circ - 30^\circ) = 50^\circ$  et  $\angle BDF = 50^\circ - (180^\circ - 70^\circ - 80^\circ) = 20^\circ$

Conclusion : Les angles  $\angle BDE$  sont tous égaux à  $10^\circ$  dans les trois cas de figure tandis que les angles  $\angle EDF$  des figures n°1 et n°2 prennent la même valeur de  $20^\circ$  comme  $\angle BDF$  dans la figure n°3.

### Question n°3

A partir des démonstrations faites dans les réponses aux questions n°1 et n°2, on observe que :

- les triangles OBC et CGH sont équilatéraux,
- le quadrilatère BFOD est un losange, le quadrilatère ABOD est un trapèze isocèle ainsi que le trapèze BHOG, le quadrilatère DEHO est un parallélogramme,
- les triangles DAO, OBD, HEG, EDG, OFG, FEO, CBH sont isocèles.
- sans compter les triangles égaux entre eux...

Il en résulte que :

$BC = OB = OC = VH = CG = GH = BF = HE = DO = AD = 1$

Il y a donc segments de longueur égale à la base BC du triangle isocèle ABC.

Par ailleurs, on retrouve facilement les égalités :  $DE = EG = OH$

et  $BH = OF = OG = EF$  qui résultent des propriétés des triangles mentionnés ci-dessus.

