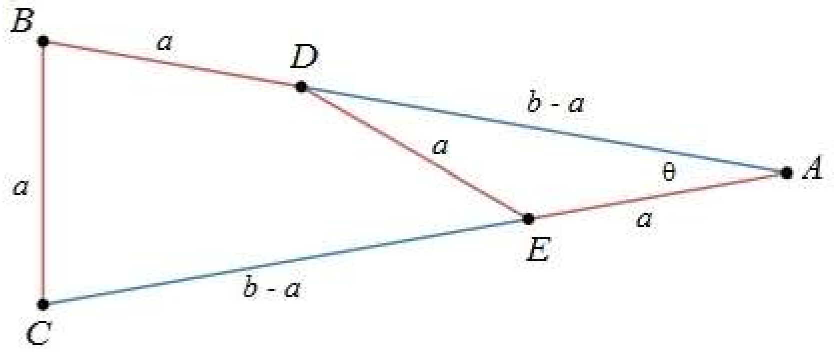
TRIÁNGULOS CABRI
1 de junio al 31 de agosto de 2022

Problema 1054. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado el triángulo isósceles que se muestra en la siguiente figura:



calcular $\frac{b}{a}$ y el ángulo θ.

Solución:

Como $b = c$, se verifica que:

$$\begin{cases} S_A = \dfrac{2b^2 - a^2}{2} \\ S_B = S_C = \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} D = (a : b - a : 0) \\ E = (b - a : 0 : a) \end{cases} \Rightarrow DE^2 = \frac{-a^4 + a^3 b + 4a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4}{b^2}$$

entonces:

$$0 = DE^2 - a^2 = \frac{(b-a)(a^3 - 3ab^2 + b^3)}{b^2} \underset{b>a}{\Rightarrow} a^3 - 3ab^2 + b^3 = 0$$

por lo que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \Rightarrow 8\left(\frac{a}{2b}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{2b}\right) + 1 = 0$$

Una vez aclarado esto, como el polinomio de Chebyshev para $n = 9$ es:

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

y:

$$\begin{cases} T_9\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)\right] = \cos(2\pi) = 1 \\ T_9\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)\right] = \cos(4\pi) = 1 \\ T_9\left[\cos\left(\dfrac{8\pi}{9}\right)\right] = \cos(8\pi) = 1 \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces, $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) > 0$, $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) > 0$ y $\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) < 0$ son las raíces de la ecuación:

$$0 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x - 1 = (x-1)(2x+1)^2(8x^3 - 6x + 1)^2$$

es decir, son las tres raíces de la ecuación:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

y, por tanto, $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ y $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ son las únicas raíces positivas de esta última ecuación, lo cual significa que:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{a}{2b} = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \Rightarrow a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)b \underset{\frac{2\pi}{9}<\frac{\pi}{3}}{>} b \rightarrow \text{ imposible} \\ \text{ó} \\ \frac{a}{2b} = \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \Rightarrow a = 2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)b \underset{\frac{4\pi}{9}>\frac{\pi}{3}}{<} b \Rightarrow \frac{b}{a} = \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)} \end{array}\right.$$

Finalmente, como:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b} = \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

entonces:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi}{9} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{9}$$