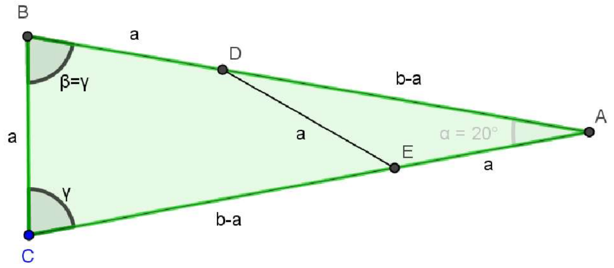
Del 1 de Junio al 31 de agosto de 2022.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)

***Problema* 1054.-** Dado el triángulo isósceles que se muestra en la siguiente figura



Calcular b/a.

Pérez, M.A . (2022): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Del triángulo isósceles AED se obtiene $b - a = 2a \cdot \cos A$. Aplicando el teorema del coseno en ΔABC.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{b}{a} = 1 + 2 \cdot \cos A = \frac{3b^2 - a^2}{b^2} = 3 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad (E)}}$$

Entonces $x = b/a$ es solución de la ecuación algebraica $x = 3 - 1/x^2$, o bien,

$$\boxed{\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \qquad (E_1)}}.$$

Haciendo $x = t + 1$, esta ecuación se transforma en $\boxed{\boldsymbol{t^3 - 3t - 1 = 0 \qquad (E_2)}}$

El discriminante de esta ecuación es $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} < 0$ (con $p = -3$ y $q = -1$).

Por tanto tiene tres raíces reales que son de la forma $t = u_k + v_k$, donde $u_k = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}}$ y $v_k = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{\Delta}}$ tal que $3uv = -p$.

Se tiene $u = \sqrt[3]{1/2 + \sqrt{3}/2i} = \sqrt[3]{1_{60°}}$, cuyas raíces cúbicas son $1_{20°}$, $1_{140°}$ y $1_{260°}$.

La condición $3uv = -p$ indica que v es la conjugada de u.

Por tanto una solución para la ecuación (E_2) es, $t_1 = 2 \cdot \text{Real}(1_{20°}) = 2 \cos 20°$.

Luego $x = \frac{b}{a} = t + 1 = 1 + 2 \cos 20°$.

Las soluciones $b/a = 1 + 2 \cos 140°$ y $b/a = 1 + 2 \cos 260°$ no sirven por ser menores que 1.

Así pues la única solución válida del problema es $b/a = 1 + 2 \cos 20°$ y por (E), $\frac{b}{a} = 1 + 2 \cdot \cos A$, deducimos que el único triángulo posible donde $b > a$ es aquél cuyo ángulo desigual es de 20°. ■