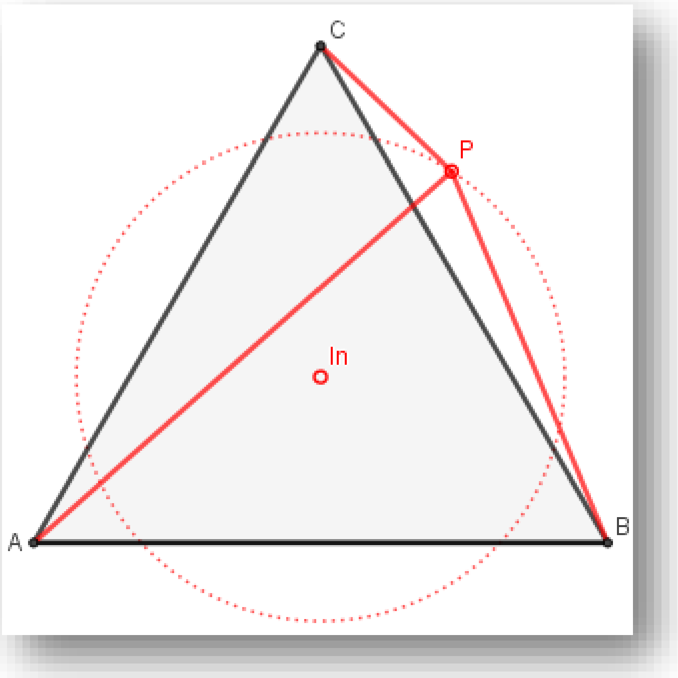
Problema 1055.

Sea ABC un triángulo equilátero de inradio r, y sea Ω una circunferencia genérica con centro en su incentro. Sea P un punto arbitrario de la misma. Probar que PA, PB y PC forman un triángulo y que su área es constante. Por ejemplo si el radio de Ω es 4r, el triángulo formado tiene de área [ABC].

Propuesto por Barroso, R. (2022): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España).

a) Sea realizada la siguiente construcción.
Vamos a recordar el Teorema de Leibnitz que nos asegura, siendo P un punto de la circunferencia centrada en G, Baricentro del triángulo ABC, que la suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 = K\ (Cte)$.



Para ello, siendo G el baricentro del ΔABC.

$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 = 3 \cdot \overrightarrow{PG}^2 + 2\overrightarrow{PG} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}} + \left(\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2\right)$$

Por tanto,

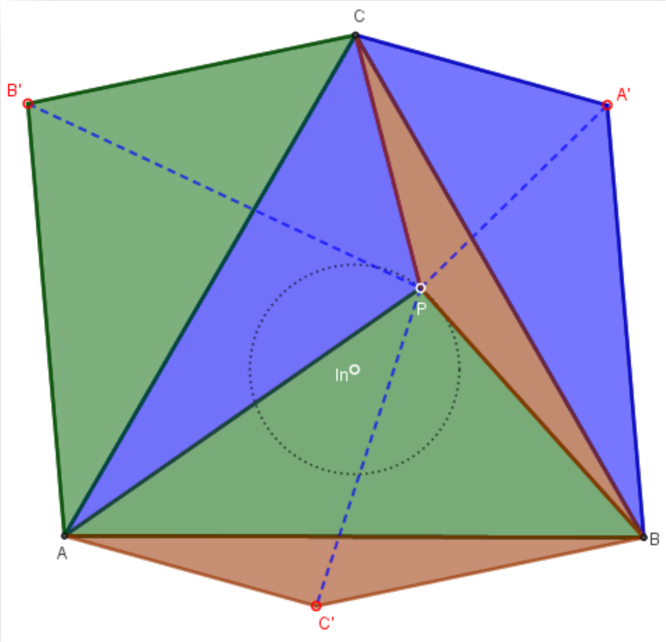
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3 \cdot PG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) = K(Cte)$$

En el caso de un triángulo equilátero $G = I_n = O$, entonces:

$$GA = GB = GC = 2r \to AB = AC = BC = l = 2\sqrt{3}r$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3 \cdot PG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) = 3 \cdot PG^2 + 12r^2 = 3 \cdot PG^2 + l^2;$$

Si el punto P es interior al ΔABC, al realizar tres rotaciones sucesivas del modo:



$$R_1[\Delta PAB; A; 60°] = \Delta B'AC;$$
$$R_2[\Delta PCA; C; 60°] = \Delta A'CB;$$
$$R_3[\Delta PBC; B; 60°] = \Delta C'BA;$$

Estos movimientos traen como resultado la construcción de un hexágono $[AB'CA'BC']$, cuya área es el doble del ΔABC.

Por otra parte, la misma figura puede descomponerse en tres triángulos equiláteros,

$$\Delta PB'A, \Delta PC'B, \Delta PA'C,$$

Y otros tres triángulos equivalentes al triángulo formado por los lados PA, PB, PC.
Estos son $\Delta PAC'; \Delta PBA'; \Delta PCB'$.

En definitiva, podemos establecer la siguiente relación entre áreas:

$$2[\Delta ABC] = [\Delta PB'A] + [\Delta PC'B] + [\Delta PA'C] + \underbrace{[\Delta PAC'] + [\Delta PBA'] + [\,\Delta PCB']}_{3[\Delta(PA,PB,PC)]}$$

$$2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}PA^2 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}PB^2 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}PC^2 + 3[\Delta(PA,PB,PC)]$$

$$3[\Delta(PA,PB,PC)] = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(PA^2+PB^2+PC^2) = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(3\cdot PG^2 + l^2)$$

$$[\Delta(PA,PB,PC)] = \frac{\sqrt{3}}{12}l^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}PG^2;$$

$$[\Delta(\boldsymbol{PA},\boldsymbol{PB},\boldsymbol{PC})] = \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{12}}(\boldsymbol{l^2} - \boldsymbol{3}\cdot\boldsymbol{PG^2}) = (\boldsymbol{Cte.})$$

b) Si el punto P es exterior, ha de entenderse la fórmula como el valor del área orientada $(+$ ó $-)$.

Si el radio de la circunferencia Ω es 4r, el triángulo formado tiene de área $[\Delta(PA,PB,PC)] = \frac{\sqrt{3}}{12}(l^2 - 3\cdot PG^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}(l^2 - 3\cdot 16\,r^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}(l^2 - 48\,r^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}(l^2 - 4\,l^2);$

$$[\Delta(PA,PB,PC)] = -\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \rightarrow |[\Delta(PA,PB,PC)]| = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

$$[\Delta(\boldsymbol{PA},\boldsymbol{PB},\boldsymbol{PC})] = [\Delta\boldsymbol{ABC}]$$