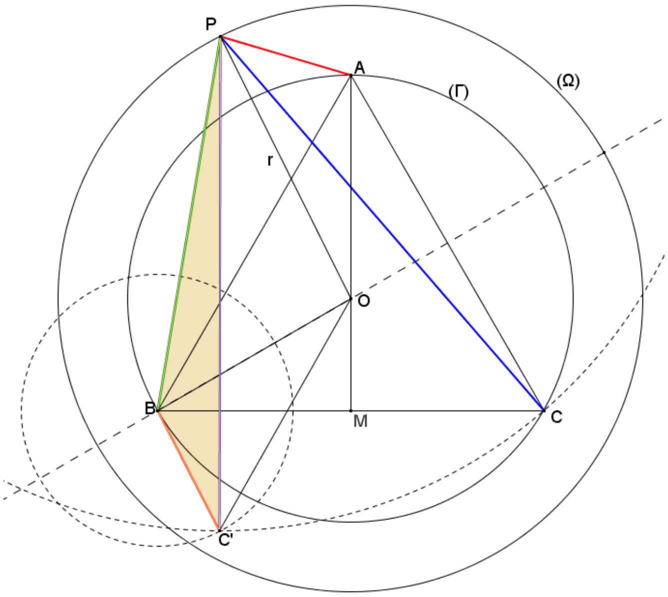
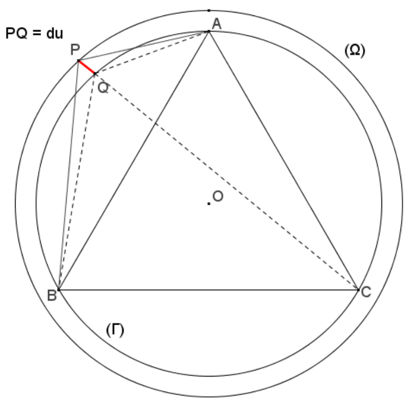
Problema 1055
Sea ABC un triángulo equiláterode inradio r, y sea Ω una circunferencia genérica con centro en su incentro.
Sea P un punto arbitrario de la misma.
Probar que PA, PB y PC forman un triángulo y que su área es constante.
Por ejemplo si el radio de Ω es 4r, el triángulo formado tiene de área [ABC].

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On détermine les coordonnées des sommets du triangle équilatéral ABC dans un repère (Ox,Oy) dont l'origine O est le centre du cercle (Γ) circonscrit à ABC et les axes Ox et Oy sont parallèles respectivement à BC et à la médiatrice AM de ce côté.
Sans perte de généralité on pose OA = 2. D'où OM = 1 et BM = $\sqrt{3}$
D'où les coordonnées de A (0,2), de B($-\sqrt{3}$,–1), de C($\sqrt{3}$,1).
Soit Ω le cercle de centre O,de rayon r et de point courant P de coordonnées (x,y).On a $x^2 + y^2 = r^2$.
On pose PA = a, PB = b et PC = c



Supposons que PC est le plus grand des trois segments. Démontrons que l'on peut toujours construire un triangle ABC avec les segments PA,PB et PC.
Traçons le cercle Ω de rayon OA + ε. Soit P un point courant de Ω. PC coupe (Γ) en P.
D'après le théorème de Ptolémée appliqué au quadrilatère inscriptible QABC, on a QC.AB = QA.BC + QB.CA.
Comme AB = BC = CA, on a QC = QA + QB
On pose PC = QC + PQ = QC + du. On a PA > QA + du et PB > QB + du
D'où PC = QC + du < QA + QB + 2du = PA + PB. C.q.f.d.
Même raisonnement si P est intérieur à (Γ).

$a^2 = PA^2 = x^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4 = r^2 - 4y + 4$
$b^2 = PB^2 = (x + \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = r^2 + 2x\sqrt{3} + 2y + 4$
$c^2 = PC^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = r^2 - 2x\sqrt{3} + 2y + 4$
Soit S l'aire du triangle construit avec les segments PA,PB et PC
D'après la formule de Héron, on a $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ avec $s = (a + b + c)/2$

D’où $16S^2 = (a + b + c).(- a + b + c).(a - b + c).(a + b - c) = -(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Or $a^4 = (r^2 + 4)^2 + 16y^2 - 8y(r^2 + 4)$,

$b^4 = (r^2 + 2y + 4)^2 + 12x^2 + 4\sqrt{3}\,x(r^2 + 2y + 4)$

$c^4 = (r^2 + 2y + 4)^2 + 12x^2 - 4\sqrt{3}\,x(r^2 + 2y + 4)$

$2a^2b^2 = 2(r^2 - 4y + 4).(r^2 + 2x\sqrt{3} + 2y + 4)$

$2b^2c^2 = 2’r^2 + 2y + 4)^2 - 24x^2$

$2c^2a^2 = 2(r^2 - 4y + 4).(r^2 - 2x\sqrt{3} + 2y + 4)$

Après développement de ces relations, on obtient :

$-(a^4 + b^4 + c^4) = -(3(r^2 + 4)^2 + 24r^2)$

et $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 6(r^2 + 4)^2 - 24r^2$

D’où $16S^2 = 3(r^2 + 4)^2 - 48r^2 = 3(r^2 - 4)^2$ ➔ $\mathbf{S^2 = 3(r^2 - 4)^2/16}$

On en conclut que S ne dépend que de r et pas de position de P(x,y) sur Ω.

On vérifie que pour **r = 4, on a S = 3$\sqrt{3}$ qui est l’aire du triangle ABC**