Del 1 de Junio al 31 de agosto de 2022.

Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

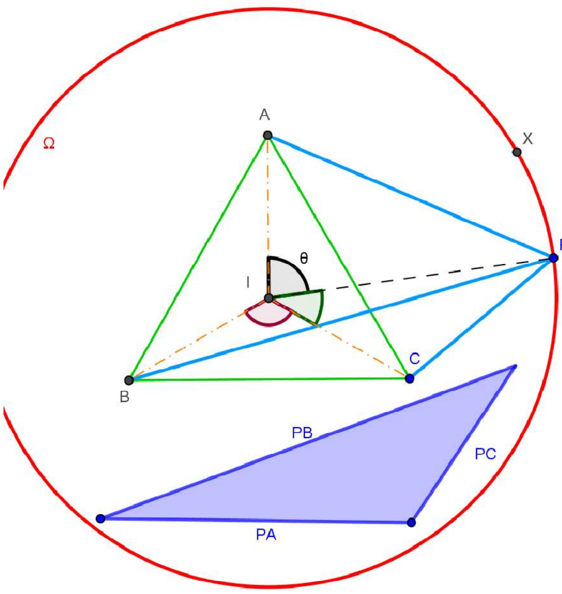
***Problema* 1055.-** Sea ABC un triángulo equilátero de inradio r y sea Ω una circunferencia genérica con centro en su incentro. Sea P un punto arbitrario de la misma. Probar que PA, PB y PC forman un triángulo y que su área es constante.

Por ejemplo si el radio de Ω es $4r$, el triángulo formado tiene de área $[ABC]$.

Barroso, R. (2022): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Voy a llamar Δ al área de un triángulo de lados a, b y c; R al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC y R' al radio de Ω.



Poniendo $\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \operatorname{sen} A$ y haciendo

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

tenemos $\Delta = \frac{1}{2} bc \sqrt{\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}$

Elevando al cuadrado tenemos

$$16\Delta^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2$$

La expresión $\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$ representa el cuadrado del seno de un ángulo, por tanto, ha de ser de signo positivo.

Los segmentos PA, PB y PC formarán un triángulo siempre que el **numerador** de esa expresión -en la que a, b y c se sustituyen por PA, PB y PC- sea de signo positivo. Demostrando esto tendremos prácticamente calculada el área de dicho triángulo.

En el triángulo PIA podemos calcular la longitud del segmento PA, aplicandoel teorema del coseno:

$$PA^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\theta$$

Análogamente de los triángulos PIB y PIC obtenemos la expresión de los otros dos segmentos:

$$PB^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(240° - \theta) = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(120° + \theta)$$
$$= R^2 + R'^2 + RR'\left(\cos\theta + \sqrt{3}\cdot \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$PC^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(120° - \theta) = R^2 + R'^2 + RR'\left(\cos\theta - \sqrt{3}\cdot\operatorname{sen}\theta\right).$$

$\boldsymbol{PB^2 + PC^2 - PA^2} = R^2 + R'^2 + 4RR'\cos\theta = \alpha + 4\beta\cos\theta$, llamando $\alpha = R^2 + R'^2$ y $\beta = RR'$.

$$(\boldsymbol{PB^2 + PC^2 - PA^2})^2 = (\alpha + 4\beta\cos\theta)^2$$

$$\boldsymbol{4PB^2 \cdot PC^2} = \ 4\left[\alpha + \beta\left(\cos\theta + \sqrt{3}\cdot \operatorname{sen}\theta\right)\right]\left[\alpha + \beta\left(\cos\theta - \sqrt{3}\cdot \operatorname{sen}\theta\right)\right]$$
$$= 4[(\alpha + \beta\cdot\cos\theta)^2 - 3\beta^2\cdot \operatorname{sen}^2\theta]$$

Para finalizar

$$\boldsymbol{4PB^2 \cdot PC^2 - PB^2 + PC^2 - PA^2} = 4[(\alpha + \beta\cdot\cos\theta)^2 - 3\beta^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta] - (\alpha + 4\beta\cos\theta)^{\mathbf{2}}$$
$$= 3\alpha^2 - 12\beta^2 = 3[(R^2 + R'^2)^2 - 4R^2\,R'^2] = 3(R^2 - R'^2)^2$$

que, como puede verse es constante. Por tanto

$$16\Delta^2 = \boldsymbol{4PB^2 \cdot PC^2 - PB^2 + PC^2 - PA^2} = 3(R^2 - R'^2)^2$$

de donde

$$\Delta = [\boldsymbol{PA}, \boldsymbol{PB}, \boldsymbol{PC}] = \boldsymbol{\sqrt{3}/4|R^2 - R'^2|}.$$

El área del triángulo equilátero de lado l es $[ABC] = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot l^2$, con $l = \sqrt{3}R$. Si $R' = 4r = 2R$, tenemos $|R^2 - R'^2| = 3R^2 = l^2$ y entonces $\Delta = \sqrt{3}/4|R^2 - R'^2| = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot l^2 = [ABC]$ ■